UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST & LSVTE – S1**
2015–2016

Analyse élémentaire

Série n° 1 — Fonctions de R dans R

Ex 1.1 – Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) \coloneqq \sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x}}$;

2) $f(x) \coloneqq \sqrt{\dfrac{5x^2+x-4}{x^2-9}}$;

3) $f(x) \coloneqq \sqrt{|5x^2+7x|-6}$.

Ex 1.2 – Pour chaque réel x, on désigne par $\mathrm{E}(x)$ sa partie entière (définie comme l'unique $n \in \mathbf{Z}$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$).
Représenter les graphes des fonctions f et g de $[-2,3]$ dans $\mathbf{R}$ définies par

$$f(x) \coloneqq \mathrm{E}(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) \coloneqq x - \mathrm{E}(x) \ .$$

Ex 1.3 – Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction f est minorée, majorée ou bornée en n'utilisant que des inégalités :

1) $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \dfrac{x}{1+1/x}$;

2) $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \sqrt{1+x}-x$;

3) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \dfrac{3x}{x^2+1}$.

Ex 1.4 – Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5-x^3+2x^2+3}{2x^5+3x+1} \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+3} \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1} \ ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right) , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \ ,$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) , \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right) ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(m-1)x^3+4x+1}{mx^2+1} \ \text{avec } m \in \mathbf{R} \ , \qquad \lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} \ \text{avec } a \in \mathbf{R} \ .$$

Ex 1.5 – Étudier la continuité en 0 de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq x/|x|$ pour $x \neq 0$ et $f(0) \coloneqq 0$;

2) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+1/x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) \coloneqq 0$;

3) $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \mathrm{E}(1/x^3)\sqrt{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) \coloneqq 0$.

Ex 1.6 – Étudier la continuité des fonctions f et g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par

$$f(x) \coloneqq x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)} \qquad \text{et} \qquad g(x) \coloneqq \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}\ .$$

Ex 1.7 – Étant donné une fonction continue $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui vérifie $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$, montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel qu'on ait $f(a) = a$ (faire un dessin).
Que se passe-t-il sans l'hypothèse de continuité ?

Ex 1.8 – (Le randonneur)
Un randonneur part du village de La Gurraz en Haute-Tarentaise pour se rendre au refuge de Turia près du Mont Pourri. Après avoir passé la nuit au refuge, il redescend au village le lendemain en empruntant le même itinéraire que la veille à l'aller.
Montrer que si les heures de départ et d'arrivée sont identiques pour les deux jours, il existe au moins un endroit du sentier où le randonneur est passé exactement à la même heure (faire un dessin).

Ex 1.9 – Étant donné une fonction continue $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ainsi que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbf{R}$.
Appliquer ce résultat aux fonctions polynomiales ayant un degré impair.

Ex 1.10 – Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et donner $f'(0)$ s'il y a lieu :

1) $f(x) \coloneqq x|x|$;

2) $f(x) \coloneqq x\,\mathrm{E}(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) \coloneqq 1$;

3) $f(x) \coloneqq \dfrac{|x^3|}{1 + |x^2 - 1|}$;

4) $f(x) \coloneqq x^2$ pour $x < 0$ et $f(x) \coloneqq x\,\mathrm{E}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ pour $x \geqslant 0$.

Ex 1.11 – Déterminer la fonction dérivée f' dans chacun des cas suivants :

1) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq (2x-1)^3$;

2) $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)^4$;

3) $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$.

Ex 1.12 – (Croissance d'un sapin)
En supposant que le tronc d'un sapin peut être assimilé à un cône circulaire droit dont la hauteur est égale à 50 fois le rayon du disque de base, à quelle vitesse augmente la masse d'un sapin de hauteur égale à 10 m si ce rayon croît de 1 cm/an et sachant que la densité du bois de sapin est égale à $0,8$? (On donnera le résultat en kg/an).

Ex 1.13 – (L'automobiliste)
Circulant sur une route pour laquelle l'allure est limitée à 110 km/h, une voiture a son indicateur de vitesse qui affiche 80 km/h au moment où elle passe devant la borne kilométrique 128 et 88 km/h devant la borne kilométrique 136 quatre minutes plus tard.
Montrer que l'automobiliste de cette voiture a été en infraction entre ces deux bornes.

Ex 1.14 – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer les dérivées d'ordre n des fonctions f et g de $[2, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définies par

$$f(x) \coloneqq \frac{1+x}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad g(x) \coloneqq \frac{1+x}{1-x} \, .$$

Ex 1.15 – Étudier les fonctions f et g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par

$$f(x) \coloneqq x^4 - 6x \qquad \text{et} \qquad g(x) \coloneqq \frac{x^4}{x^2-1} \, ,$$

puis tracer leurs graphes.

Ex 1.16 – Dresser le tableau des variations de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) \coloneqq \dfrac{x^3+10x}{x^2+1}$ et montrer que son graphe Γ admet une droite asymptote en $+\infty$ par rapport à laquelle on précisera la position de Γ (dessin).

Ex 1.17 – Dans chacun des cas suivants, déterminer si le graphe Γ de la fonction f de $[2, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ admet une droite asymptote en $+\infty$ et préciser la position de Γ par rapport à cette droite :

1) $f(x) \coloneqq 2x + 1 - \sqrt{x}$;

2) $f(x) \coloneqq x - 2 + \dfrac{x+1}{x-1}$;

3) $f(x) \coloneqq 3x + 2 - \sqrt{4x^2 - x}$.