UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST & LSVTE – S1**
2015–2016

Analyse élémentaire

Série n° 2 — Fonctions usuelles

Ex 2.1 – Effectuer la division euclidienne de la fonction polynomiale $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par la fonction polynomiale $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) \coloneqq 2x^3 + x^2 - x + 3$ et $g(x) \coloneqq 2x + 3$;
2) $f(x) \coloneqq x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ et $g(x) \coloneqq x^3 + x^2 + 2$;
3) $f(x) \coloneqq x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 2x^2 + 7x + 4$ et $g(x) \coloneqq x^5 + 2$.

Ex 2.2 – Factoriser la fonction polynomiale $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x \in \mathbf{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) \coloneqq 4x^2 + 5x + 1$;
2) $f(x) \coloneqq x^4 + x^2 - 6$;
3) $f(x) \coloneqq 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x$;
4) $f(x) \coloneqq 2x^4 + 2x^3 - 2x - 2$.

Ex 2.3 – Étant donné une fonction polynomiale $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de degré $n \in \mathbf{N}$, montrer qu'on a l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Ex 2.4 – Exprimer $A \coloneqq \ln 8$, $B \coloneqq \ln(1/16)$ et $C \coloneqq (\ln 64)/4$ en fonction de $a \coloneqq \ln 2$.

Ex 2.5 – Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$;
2) $e^{x(x-1)} = 1$;
3) $e^{-2x} - 2e^{-x} - 3 = 0$;
4) $2^{1+x} - 2^{1-x} - 3 = 0$;
5) $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$.

Ex 2.6 – Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} x^3 \ln(\sqrt{x})$, $\lim\limits_{x \to 0} \big(\ln x + 1/\sqrt{x}\big)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \big((\ln x)^2 - \ln x - x\big)$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} e^x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 1 - e^x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1 - e^x)$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \big(\ln x - x^2 - e^x\big)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 x^4 e^{-x}$, $\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x} \ln x$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^x - x}{2x - e^x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x / x^b$ avec $a > 1$ et $b \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} x^x$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 1/x)^x$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 - x} - 2e^x}{\ln(1 - x)}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) + 2x^2 - x}{x - 1 + e^{-x}}$.

Ex 2.7 – Déterminer la fonction dérivée f' dans chacun des cas suivants :

1) $f :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$;

2) $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \dfrac{\ln x}{(4x+2)^3}$;

3) $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq 2^x/e^{\sqrt{x}}$.

Ex 2.8 – Calculer $A \coloneqq \cos(\pi/8)$ en écrivant $2 \times \pi/8 = \pi/4$ ainsi que $B \coloneqq \sin(\pi/12)$ en remarquant qu'on a $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$.

Ex 2.9 – On se propose de calculer $C \coloneqq \cos(\pi/5)$.

1) Établir l'égalité $\sin(3x) = 4\sin x\cos^2 x - \sin x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

2) En remarquant qu'on a $\sin(3\pi/5) = \sin(2\pi/5)$, montrer que $\pi/5$ est solution de l'équation $4\sin x\cos^2 x - \sin x = 2\sin x\cos x$.

3) En déduire que C est solution de l'équation $4u^2 - 2u - 1 = 0$, puis calculer C.

Ex 2.10 – Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos x = \cos a$ avec $a \in \mathbf{R}$;

2) $\cos x + \sin x = 0$;

3) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$;

4) $\sin x + \sin(2x) = \sin(3x)$;

5) $3\tan x = 2\cos x$.

Ex 2.11 – Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} x^3\cos^4(1/x^2)\ , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2(1/x) - \sin(1/x) + 3}{x + \sqrt{x}}\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}\ ,$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + \sin x)^{1/x}\ , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}\ , \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\sin x}\ .$$

Ex 2.12 – Déterminer la fonction dérivée f' dans chacun des cas suivants :

1) $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \dfrac{\cos^3(2x)}{\sqrt[3]{3x+1}}$;

2) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq \sqrt{\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}$;

3) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) \coloneqq (1+x^2)^{\cos(x^3)}$.