

Analyse élémentaire

Série n° 4 — Équations différentielles linéaires

Ex 4.1 – Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y' - 3y = 5$ sur \mathbf{R} ;
- 2) $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$ sur \mathbf{R} ;
- 3) $y' + y \cos x = \sin(2x)/2$ sur \mathbf{R} ;
- 4) $y' + y \tan x = \cos^2 x$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Ex 4.2 – (Proies et prédateurs)

À chaque instant $t \geq 0$, on note $y(t)$ le nombre d'individus d'une certaine espèce vivante.

- 1) On suppose qu'en l'absence de prédateurs l'évolution de la population de cette espèce est modélisée par l'équation différentielle (E) : $y' = ky$, où $k > 0$ est une constante.
 - a) Que représente la constante k ?
 - b) Résoudre l'équation différentielle (E) .
 - c) Déterminer la limite de $y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Le modèle utilisé est-il plausible ?
- 2) On suppose à présent qu'une autre espèce dont le nombre d'individus $p > 0$ est constant se nourrit de l'espèce étudiée de sorte que l'évolution de la population de cette dernière est modélisée par la nouvelle équation différentielle (\mathcal{E}) : $y' = ky - apy$, où $a > 0$ est une constante.
 - a) Que représente la constante a ?
 - b) Résoudre l'équation différentielle (\mathcal{E}) .
 - c) Déterminer la limite de $y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ (on discutera suivant le signe de la constante $k - ap$). Interpréter.

Ex 4.3 – Résoudre sur \mathbf{R} les équations différentielles suivantes :

- 1) $y'' + 2y' - 3y = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$;
- 2) $y'' - 4y' + 4y = (x + 3)e^{2x}$;
- 3) $y'' + y' + y = e^x + x + 1$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Ex 4.4 – (Circuit RLC en série)

On considère un circuit électrique formé d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur de tension continue E .

À chaque instant $t \geq 0$, la charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation différentielle

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E .$$

En supposant qu'on a $R^2C/L < 4$, exprimer $q(t)$ en fonction de t sachant qu'initialement le condensateur est déchargé et l'intensité du courant dans le circuit électrique vaut $ERC/(2L)$ ampères.