Séances 6 et 7 : Exercices supplémentaires

Etude des fonctions spéciales

Exercice 1.
Résoudre les équations suivantes

1. $e^{2x} - e^x - 2 = 0$.
2. $3^x + 3^{-x} - 2 = 0$.
3. $e^{x^2-3x+1} = 1$.

Exercice 2.
Donner les limites suivantes

1. a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{x+5}$, b)$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3}{x+5}$
2. a)$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3x}{x+5}$, b)$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x+3x}{x+5}\right)$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{2x}$

Exercice 3.
Calculer f' dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{\ln(3x)}$
2. $f(x) = e^{\frac{x+3}{x^2+1}}$
3. $f(x) = 3^x \ln(x^3)$

Exercice 4.
Soit $f(x) = x\left(\frac{2\ln(x)+1}{\ln(x)}\right)$.

1. Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$.
2. Etudier la branche infinie de f en $+\infty$.

Correction de l'exercice 1

1. On pose $y = e^x$. L'équation en y est $y^2 - y + 2 = 0$. Cette équation a 2 racines $y_1 = -1$ et $y_2 = 2$. Donc soit $e^x = -1$ (exclu car e^x est toujours positif) soit $e^x = 2$. Donc la seule solution est $x = \ln(2)$.

2. On pose $y = 3^x$. L'équation en y est $y + \frac{1}{y} - 2 = 0$, ou en multipliant à gauche et à droite par y : $y^2 + 1 - 2y = 0$. Cete équation a une racine $y_1 = 1$, soit $3^x = 1$, i.e. $x\ln(3) = 0$, i.e. $x = 0$.

3. En prenant le logarithme de l'égalité, cela revient à résoudre $x^2 - 3x + 1 = 0$. Cette équation a 2 solutions : $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 2

1. a)$\lim_{x\to+\infty}(e^x + 3) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x + 5) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{x+5} = ND$. On factorise par les termes de plus haut degré : $\frac{e^x+3}{x+5} = \frac{e^x}{x}\frac{(1+\frac{3}{e^x})}{(1+\frac{5}{x})}$ et $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{3}{e^x}) = 1$, $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{5}{x}) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{x+5} = +\infty \times \frac{1}{1} = +\infty$.
   b)$\lim_{x\to-\infty}(e^x + 3) = 3$, $\lim_{x\to-\infty}(x + 5) = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3}{x+5} = \frac{3}{-\infty} = -\infty$.

2. a)$\lim_{x\to-\infty}(e^x + 3x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(x + 5) = -\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3x}{x+5} = ND$. On factorise par les termes de plus haut degré, i.e. x en haut et en bas $\frac{e^x+3x}{x+5} = \frac{x}{x}\frac{(\frac{e^x}{x}+3)}{(1+\frac{5}{x})}$, puis on simplifie : $\frac{e^x+3x}{x+5} = \frac{(\frac{e^x}{x}+3)}{(1+\frac{5}{x})}$. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{e^x}{x} + 3) = 3$ et $\lim_{x\to-\infty}(1 + \frac{5}{x}) = 1$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3x}{x+5} = 3$.
   b) Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{x+5} = +\infty$, et comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x+3}{x+5}\right) = +\infty$.

3. $\frac{2\ln(x)+1}{2x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2x}$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0 + 0 = 0$.

Correction de l'exercice 3

1. $f'(x) = \frac{2xe^{x^2}\ln(3x) - \frac{e^{x^2}}{x}}{(\ln(3x))^2}$

2. $f(x) = e^{u(x)}$ où $u(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$. $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ et $u'(x) = \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1})^2$.

3. $f(x) = 3^x\ln(x^3) = 3^x 3\ln(x) = e^{x\ln(3)}3\ln(x)$. $f'(x) = 3(\ln(3)e^{x\ln(3)}\ln(x) + \frac{e^{x\ln(3)}}{x}) = 3e^{x\ln(3)}(\ln(3)\ln(x) + \frac{1}{x}) = 3^{x+1}(\ln(3)\ln(x) + \frac{1}{x})$.

Correction de l'exercice 4

1. $g(x) = x\left(2 + \frac{1}{\ln(x)}\right)$, donc $\lim_{x\to0^+}(2 + \frac{1}{\ln(x)}) = 2$, $\lim_{x\to0^+} g(x) = 0$.

2. $g(x) = x\left(2 + \frac{1}{\ln(x)}\right)$, donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On regarde ensuite $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. $\frac{g(x)}{x} = 2+\frac{1}{\ln(x)}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$. Il faut donc étudier $\lim_{x\to+\infty} g(x)-2x$ et $g(x)-2x = \frac{x}{\ln(x)}$. D'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) - 2x = +\infty$. On a une branche parabolique de direction $y = 2x$.