Séance 4 : Exercices supplémentaires

Etude de courbes

Exercice 1.
Etudier et tracer la courbe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$
2. $f(x) = \frac{2x^2-6}{x-2}$

Exercice 2.
Etudier les branches infinies des fonctions suivantes en $+\infty$.

1. $f(x) = \frac{x^2+2x}{2x-1}$
2. $f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

Correction de l'exercice 1

1. f n'est ni paire ni impaire, on ne peut pas réduire son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$. f' s'annule en -3 et en 1.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	30	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, on a une branche parabolique verticale en $+\infty$ (de même en $-\infty$).

2. f n'est ni paire ni impaire, on ne peut pas réduire son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. $f'(x) = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$. f' s'annule en 1 et 3, et f' est positive sur $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ et négative sur $[1, 3]\backslash\{2\}$.

x	$-\infty$		1			2			3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-		$\Vert$		-	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 4$, la droite d'équation $y = 2x + 4$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ (elle est au dessus de la courbe $f(x) - 2x - 4 = \frac{8}{x-2}$) et en $-\infty$ (elle est en dessous de la courbe).

Correction de l'exercice 2

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$. Puis on étudie $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x)$. On a

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{5x}{4x-2}.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x) = \frac{5}{4}$. L'asymptote oblique est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$. On étudie la position de la courbe par rapport à l'asymptote lorsque x est grand

$$f(x) - (\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}) = \frac{5}{8x-4} \geq 0.$$

L'asymptote est donc au dessus de la courbe.

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Puis on étudie $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$. On a

$$f(x) - x = \frac{-2x^2 + 7x - 4}{(x-1)^2}.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -2$. L'asymptote oblique est la droite d'équation $y = x - 2$. On étudie la position de la courbe par rapport à l'asymptote lorsque x est grand

$$f(x) - (x - 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2} \geq 0.$$

L'asymptote est donc au dessus de la courbe.