Séance 3 : Exercices supplémentaires

Limites et dérivées

Exercice 1.
Etudier la limite de f aux points proposés :

1. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+2x+1)$
2. $\lim_{x\to+\infty}(3\sqrt{x}-x^2)$
3. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{-5}{x}+x^2)$
4. $\lim_{x\to2^+}(\frac{3}{x-2}+5x+7)$
5. $\lim_{x\to-\infty}(x^4-3x^3+2x-6)$
6. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-4x+2}{-x+3})$
7. $\lim_{x\to3^-}(\frac{x^2-4x+2}{x-3})$
8. $\lim_{x\to2^-}(\frac{x^2-3x+2}{x-2})$

Exercice 2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes, et donner le domaine de définition de f et de f'.

1. $f(x)=(3x-1)^3$
2. $f(x)=(5x-2)^2(x^2+3x-1)^2$
3. $f(x)=\frac{x-5}{2x+3}$
4. $f(x)=\frac{2x+4}{3x-1}$
5. $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$
6. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$
7. $f(x)=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$
8. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x}}$

Correction de l'exercice 1

1. $+\infty$
2. $-\infty$
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. $+\infty$
6. $-\infty$
7. $+\infty$
8. 1

Correction de l'exercice 2

1. $f'(x) = 9(3x-1)^2$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.
2. $f'(x) = (5x-2)(x^2+3x-1)(30x^2+52x-22)$. Pour cela, on pose $u(x) = (5x-2)^2$ $u'(x) = 10(5x-2)$, $v(x) = (x^2+3x-1)^2$, $v'(x) = 4(x^2+3x-1)(2x+3)$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.
3. $f'(x) = \frac{13}{(2x+3)^2}$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{3}{2}\}$.
4. $f'(x) = \frac{-14}{(3x-1)^2}$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$.
5. $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.
6. $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$. $D_f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. $D_{f'} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.
7. $f'(x) = -6\frac{x+2}{(x-1)^3}$. Pour cela, on pose $u(x) = \frac{x+2}{x-1}$. On a $u'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$ $f'(x) = 2u(x)u'(x)$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
8. $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{2x}\sqrt{x+1}}$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.