Equations différentielles

Equations différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants.

On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants donnée par

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{E}$$

▷ *Etape 1.* Résolution de l'équation homogène.
On considère l'équation homogène associée à (E) donnée par

$$z'(x) + a(x)z(x) = 0 \tag{E_0}$$

Et on cherche la fonction z solution de (E_0).
Soit A une primitive de a. On multiplie (E_0) par $e^{A(x)}$:

$$z'(x)e^{A(x)} + z(x)a(x)e^{A(x)} = 0$$

Le membre de gauche est de la forme $z'v + zv'$, avec $v(x) = e^{A(x)}$ et $v'(x) = A'(x)e^{A(x)} = a(x)e^{A(x)}$.
Alors

$$\begin{aligned} & z'(x)e^{A(x)} + z(x)a(x)e^{A(x)} = 0 \\ \Rightarrow & \left(z(x)e^{A(x)}\right)' = 0 \\ \Rightarrow & z(x)e^{A(x)} = k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & z(x) = ke^{-A(x)} \qquad \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $z(x) = ke^{-A(x)}$ est une solution de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

▷ *Etape 2.* Solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.
On considère maintenant que $k = k(x)$. Et soit $y_P(x) = k(x)e^{-A(x)}$. Alors

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= k'(x)e^{-A(x)} + (-A'(x)k(x)e^{-A(x)} \\ &= k'(x)e^{-A(x)} - a(x)k(x)e^{-A(x)} \end{aligned}$$

En remplaçant y_P et y_P' dans (E), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(k'(x)e^{-A(x)} \cancel{- a(x)k(x)e^{-A(x)}}\right) + \cancel{a(x)k(x)e^{-A(x)}} = b(x) \\ \Rightarrow & \quad k'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \Rightarrow & \quad k'(x) = b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

On détermine la fonction k en calculant une primitive H de la fonction $b(x)e^{A(x)}$. Alors

$$y_P(x) = H(x)e^{-A(x)}$$

▷ *Etape 3.* Solution générale de (E).
La solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants (E) est donnée par

$$\boxed{y(x) = z(x) + y_P(x)}$$

Equations différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants donnée par

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \tag{E}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

▷ *Etape 1.* Résolution de l'équation homogène.
On considère l'équation homogène associée à (E) donnée par

$$z''(x) + az'(x) + bz(x) = 0 \tag{E_0}$$

Et on cherche z solution de (E_0). Pour cela, on cherche les racines du polynôme caractéristique associé à (E_0), autrement dit on résoud

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{T}$$

On a $\Delta = a^2 - 4b$. Selon le signe de Δ :

$\Delta > 0$	(T) admet 2 racines réelles simples r_1 et r_2	$z(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	(T) admet 1 racine réelle double r_0	$z(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	(T) n'admet aucune racine réelle	$z(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)\right]$

pour tout $A, B \in \mathbb{R}$.

▷ *Etape 2.* Solution particulière de (E).
On cherche une solution particulière y_P de (E). Selon la forme du second membre $f(x)$:

1) $f(x) = P(x)$ avec P polynôme de degré n	$y_P(x) = x^p Q(x)$, avec Q polynôme de degré n et $p = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \text{ n'est pas une racine de } (T) \\ 1 & \text{si } 0 \text{ est une racine simple de } (T) \\ 2 & \text{si } 0 \text{ est une racine double de } (T) \end{cases}$
2) $f(x) = e^{mx}P(x)$ avec P polynôme de degré n	$y_P(x) = x^p e^{mx} Q(x)$, avec Q polynôme de degré n et $p = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas une racine de } (T) \\ 1 & \text{si } m \text{ est une racine simple de } (T) \\ 2 & \text{si } m \text{ est une racine double de } (T) \end{cases}$
3) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec f_1 et f_2 vérifiant 1) ou 2)	• On cherche y_1 sol. part. de $y_1'' + ay_1' + by_1 = f_1(x)$ avec 1) ou 2) ; • On cherche y_2 sol. part. de $y_2'' + ay_2' + by_2 = f_2(x)$ avec 1) ou 2) ; • $y_P(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

On calcule y_P' et y_P'', on remplace dans (E) et on identifie les coefficients de Q.

▷ *Etape 3.* Solution générale de (E).
La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) est donnée par

$$\boxed{y(x) = z(x) + y_P(x)}$$