30/09/2015

Contrôle 2
(MIASHS)
(PC-SV)

Exercice 1 :

Domaine de définition de f.

Pour que f soit définie, on cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^4 - 4x^2 + 3 \geq 0$$

Posons $y := x^2$. On se ramène alors à l'étude de

$$y^2 - 4y + 3$$

Etudions le signe et les racines de $y^2 - 4y + 3$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow 2 \text{ racines réelles simples}$$

$$y_1 = \frac{-(-4) - 2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-(-4)+2}{2} = 3$$

Comme $y = x^2$, on retrouve les valeurs de x pour lesquelles $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$:

$$x_1 = \sqrt{y_1} = 1 \qquad x_3 = \sqrt{y_2} = \sqrt{3}$$

$$x_2 = -\sqrt{y_1} = -1 \qquad x_4 = -\sqrt{y_2} = -\sqrt{3}$$

On en déduit le tableau de signes :

(Rq : $x^4 - 4x^2 + 3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^4-4x^2+3		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty[}$

Exercice 2 :

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x + 7}{-5x^4 + 9x^3 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^4}(1 - 3/x + 7/x^4)}{\cancel{x^4}(-5 + 9/x + 1/x^2)}$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x + 7}{-5x^4 + 9x^3 + x^2} = -\frac{1}{5}}$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})}{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x})(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})}{\cancel{1}+2x - (\cancel{1}-2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})}{4\cancel{x}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}} = \frac{1}{2}}$$

Exercice 3 :

$f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2-1}$. Calculons $f'(x)$:

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u = \sqrt{w}$, où

$$\begin{cases} w(x) = 4x+1 \\ u(x) = \sqrt{w(x)} \\ v(x) = x^2-1 \end{cases}$$

$w'(x) = 4$

$u'(x) = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$

$v'(x) = 2x$

D'où

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{4x+1}}(x^2-1) - 2x\sqrt{4x+1}}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^2-2-2x(4x+1)}{\sqrt{4x+1}}}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x^2-1)^2}\,\frac{2x^2-2-8x^2-2x}{\sqrt{4x+1}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-6x^2-2x-2}{(x^2-1)^2\sqrt{4x+1}}}$$