Contrôle 1
(SV - PC)
(STE - PC)

Exercice 1:

Domaine de définition de f:

Pour que f soit définie, on cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que

* $x^2 + x - 6 \neq 0$
* $\dfrac{4x+|x|}{x^2+x-6} \geq 0.$

① Etudions le signe et les racines de x^2+x-6:

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles simples

$x_1 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

② Etudions le signe de $4x+|x|$:

$$4x+|x| = \begin{cases} 4x+x = 5x & \text{si } x \geq 0 \\ 4x - x = 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On en déduit le tableau de signes:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$4x+\|x\|$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{4x-\|x\|}{x^2+x-6}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

car x^2+x-6 est du signe de $a=1$ à l'extérieur des racines

D'où $\boxed{D_f =]-3, 0] \cup]2, +\infty[}$.

Exercice 2:

$f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1+2x}}{x+1}$. Calculons $f'(x)$:

On remarque que $x^2+1+2x = (x+1)^2$.

Alors $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1} = 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Et donc $\boxed{f'(x) = 0}$.

Rq: Si on ne remarque pas que le trinôme sous la racine est une identité remarquable, alors:

f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u = \sqrt{w}$, où

$$\begin{cases} w(x) = x^2+1+2x & w'(x) = 2x+2 \\ u(x) = \sqrt{w(x)} & u'(x) = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+1+2x}} = \dfrac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1+2x}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1+2x}} \\ v(x) = x+1 & v'(x) = 1 \end{cases}$$

D'où

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1+2x}}(x+1) - \sqrt{x^2+1+2x} \times 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1} - (\cancel{x^2} + \cancel{1} + \cancel{2x})}{(x+1)^2}$$

$$= 0.$$

Exercice 3

1. $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$ (quantité conjuguée)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0}$$

2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 2x^5 + 4x - 1}{x^3 - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^5\left(3/x^2 - 2 + 4/x^4 - 1/x^5\right)}{x^3\left(1 - 2/x^3\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(3/x^2 - 2 + 4/x^4 - 1/x^5\right)}{1 - 2/x^3}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 2x^5 + 4x - 1}{x^3 - 2} = -\infty}$$