MATH 121-b TD1

Exercice 1:

Domaine de définition de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) $f(x) := \sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x}}$

On cherche quand $\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x} \geq 0$.

On a

$$x^3-x^2+x = x\underbrace{(x^2-x+1)}_{P(x)}$$

On $\Delta_p = 1-4 = -3 < 0 \Rightarrow x^2-x+1 > 0$ (signe de $a=1$).

Du coup,

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
x^3-x^2+x	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc le domaine de définition de f est $\boxed{D_f =]-\infty,-1] \cup]0,+\infty[}$

2) $f(x) := \sqrt{\dfrac{5x^2+x-4}{x^2-9}}$

On a

$\Delta_{num} = 1+80 = 81 > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{-10}{10} = -1$ et $\lambda_2 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

Et $x^2-9 = (x-3)(x+3)$.

Du coup,

x	$-\infty$	-3		-1		$4/5$		3		$+\infty$
$5x^2+x-4$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{5x^2+x-4}{x^2-9}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

(signe de a à l'extérieur des racines)

D'où $\boxed{D_f =]-\infty,-3[\cup [-1,\tfrac{4}{5}] \cup]3,+\infty[}$

3) $f(x) := \sqrt{|5x^2+7x|-6}$

Enlevons la valeur absolue $|5x^2+7x| = |x(5x+7)| = \begin{cases} 5x^2+7x & \text{si } x \leq -\frac{7}{5} \text{ ou } x \geq 0 \\ -5x^2-7x & \text{si } -\frac{7}{5} < x < 0 \end{cases}$

On cherche donc

$$|5x^2+7x|-6 \geq 0 \iff \begin{cases} 5x^2+7x-6 \geq 0 & \text{si } x \leq -\frac{7}{5} \text{ ou } x \geq 0 \quad (1) \\ -5x^2-7x-6 \geq 0 & \text{si } -\frac{7}{5} < x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

On a

$$\Delta_{(1)} = 49+120 = 169 > 0 \Rightarrow x_1^{(1)} = \frac{-7-13}{10} = -2 \quad \text{et} \quad x_2^{(1)} = \frac{-7+13}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\Delta_{(2)} = 49-120 < 0 \Rightarrow |5x^2+7x|-6 < 0 \quad \text{si } -\frac{7}{5} < x < 0$$

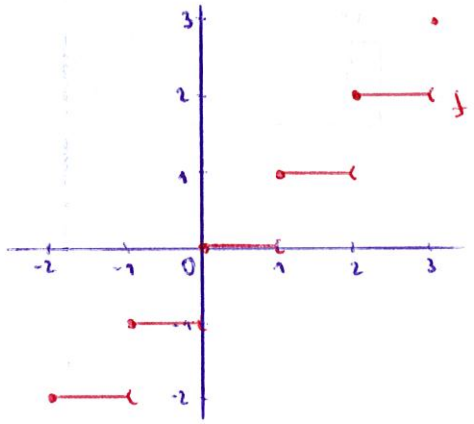
Du coup,

x	$-\infty$		-2		$-7/5$		0		$3/5$		$+\infty$
$\lvert 5x^2+7x\rvert-6$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	

D'où $\boxed{D_f =]-\infty, -2] \cup [\frac{3}{5}, +\infty[}$

Exercice 2 :

1) Graphe de $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(x)$:



$E(x) = n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$

2) Graphe de $g : [-2,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - E(x)$:

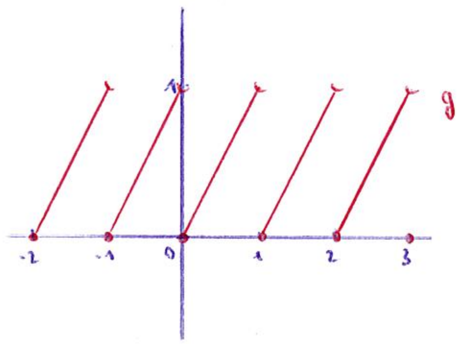
Si $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in [-2,3]$, $E(x) = n$.

$g(x) = x - E(x) = x - n$ (fonction affine)

Or on a

* $g(n) = n - n = 0$
* $g\left(\frac{n+(n+1)}{2}\right) = \frac{2n+1}{2} - n = \frac{1}{2}$

et on remarque que $\lim\limits_{x \to (n+1)^-} g(x) = 1$.



g est donc une fonction affine sur chaque intervalle $[n, n+1[$ qui passe par 0 en n et par $\frac{1}{2}$ au milieu $\frac{2n+1}{2}$ de l'intervalle.

Exercice 4 :

Calculer les limites :

1) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3}{2x^5 + 3x + 1} = Fi$

On factorise

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^5}\left(1 - {}^1/_{x^2} + {}^2/_{x^3} + {}^3/_{x^5}\right)}{\cancel{x^5}\left(2 + {}^3/_{x^4} + {}^1/_{x^5}\right)} \qquad (x \neq 0)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + 3} = Fi$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 + {}^3/_x + {}^2/_{x^2}\right)}}{x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|\cancel{x}|\sqrt{1 + {}^3/_x + {}^2/_{x^2}}}{\cancel{x}\left(1 + {}^3/_x\right)} = -1 \qquad \left(\frac{|x|}{x} = -1 \text{ si } x < 0\right)$$

3) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x - 1} = Fi$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2/3}\sqrt[3]{1 - {}^1/_{x^2}}}{x\left(1 - {}^1/_x\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - {}^1/_{x^2}}}{x^{1/3}\left(1 - {}^1/_x\right)} = 0$$

4) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - x = Fi$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x - 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x - 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - 1 - \cancel{x^2}}{|x|\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 - {}^1/_x\right)}{|x|\underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}_{\to 2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = Fi$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - (1 - x)}{x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\underbrace{\sqrt{1+x}}_{1}+\underbrace{\sqrt{1-x}}_{1})}$$

$= 1$

6) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \text{Fi}$

$= \lim_{X \to 1^+} \dfrac{X^{3/2} - 1}{X - 1}$ où $X = \sqrt[3]{x}$ et donc $\sqrt{x} = x^{1/2} = (x^{1/3})^{3/2} = X^{3/2}$

$= \lim_{X \to 1^+} \dfrac{f(X) - f(1)}{X - 1} = f'(1)$ avec $f(X) = X^{3/2}$

d'où $f'(X) = \frac{3}{2} X^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{X}$ et donc $f'(1) = \frac{3}{2}$

$= \dfrac{3}{2}$

7) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} = \text{Fi}$ $\rightsquigarrow$ on pose $t = x-1 \iff x = t+1$

$\searrow \downarrow_{t \to 0}$

1

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{1}{\cancel{1}-(t+\cancel{1})} - \dfrac{3}{1-(t+1)^3}$

$= \lim_{t \to 0} -\dfrac{1}{t} - \dfrac{3}{\cancel{1}-t^3-3t^2-3t-\cancel{1}}$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{3}{t^3+3t^2+3t} - \dfrac{1}{t}$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{\cancel{3t} - t^3 - 3t^2 - \cancel{3t}}{t^4+3t^3+3t^2}$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{-\cancel{t^2}(t+3)}{\cancel{t^2}(t^2+3t+3)}$ $(t \neq 0)$

$= -1$

8) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \text{Fi}$

$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} - \sqrt{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} - 1\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} \cancel{\sqrt{x}} \dfrac{\cancel{1} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - \cancel{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} + 1}$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}+1} = \dfrac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(m-1)x^3+4x+1}{mx^2+1}$, $m\in\mathbb{R}$ $= \text{Fi}$

On factorise :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left[(m-1)+4/x^2+1/x^3\right]}{x^2\left[m+1/x^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{m-1}{m}x = \begin{cases} +\infty & \text{si } m<0 \text{ ou } m>1 \\ -\infty & \text{si } 0\leq m<1 \\ 0 & \text{si } m=1 \end{cases}$$

En effet, si $m=1$, on calcule en fait
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(4+1/x)}{x^2(1+1/x^2)} = 0$$

Rq : Dans le quotient $\frac{m-1}{m}$, les deux valeurs qui "posent problème" sont 0 et 1. Il faut donc regarder la limite pour les valeurs particulières $m=0$ et $m=1$, puis sur les intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ afin de couvrir tout $\mathbb{R}$.

10) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, $a\in\mathbb{R}$ $= \text{Fi}$ (num $=0$) $\rightsquigarrow$ on pose $t=x-a$
ie : $x=t+a$

$$= \lim_{t\to0} \frac{(t+a)^2-(a+1)(t+a)+a}{(t+a)^3-a^3}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{t^2+2at+\cancel{a^2}-at-\cancel{a^2}-t\cancel{-a}\cancel{+a}}{t^3+3at^2+3a^2t+\cancel{a^3}-\cancel{a^3}}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{t^2+(a-1)t}{t^3+3at^2+3a^2t}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\cancel{t}\left[t+(a-1)\right]}{\cancel{t}\left[t^2+3at+3a^2\right]} \quad (t\neq0)$$

$$= \frac{a-1}{3a^2}$$

Exercice 6 :

Etude de la continuité des fonctions.

1) $f(x) := x+\sqrt{x-E(x)}$, $x\in\mathbb{R}$

On rappelle que si $x\in[n,n+1[$, $n\in\mathbb{Z}$, $E(x)=n$.

On regarde donc f sur l'intervalle $[n,n+1[$, n quelconque fixé dans $\mathbb{Z}$.

Alors $E(x)=n$, et $f(x)=x+\sqrt{x-n}$.

On observe ainsi que sur l'intervalle $[n,n+1[$, f est continue puisque $x\mapsto x-n$ est continue, $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue et la somme de fonctions continues est continue.

Il reste donc à étudier la continuité à gauche de l'intervalle (expl.).

Pour cela, on vérifie si $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = f(n) = n$. On a

$\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = \lim\limits_{x\to n^-} x+\sqrt{x-(n-1)}$ car quand $x\to n^-$, $x\in[n-1,n[$ et donc $E(x)=n-1$

$= \lim\limits_{x\to n^-} x+\sqrt{x-n+1}$

$= n+1 \neq n = f(n)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ n'est pas continue sur les entiers.}}$

2) $g(x) := E(x) + \sqrt{x - E(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

De même, on se place dans $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$. On a alors
$$g(x) = n + \sqrt{x-n}$$

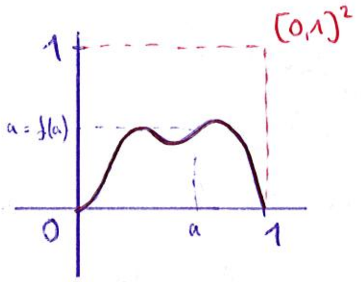
Le même raisonnement que précédemment nous permet de dire que g est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$. Il faut à nouveau regarder si $\lim_{x \to n^-} g(x) = g(n) = n$. On a

$$\lim_{x \to n^-} E(x) + \sqrt{x - E(x)} = \lim_{x \to n^-} n-1 + \sqrt{x-(n-1)}$$
$$= n-1+1$$
$$= n \quad = g(n)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

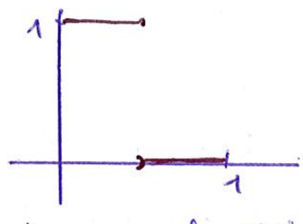
Exercice 7 :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \in [0,1]$, $\forall x \in [0,1]$.
Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$:



On pose $g(x) = f(x) - x$ $\forall x \in [0,1]$. On a
* $g(0) = f(0) \in [0,1]$
* $g(1) = f(1) - 1 \in [-1, 0]$ car $f(1) \in [0,1]$

De plus, f est continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ donc g l'est aussi.
On peut donc appliquer le théorème des Valeurs Intermédiaires :
$$\forall b \in [g(1), g(0)], \exists\, a \in [0,1] : g(a) = b \quad \text{ie} : f(a) - a = b$$
En particulier pour $b = 0$, car $-1 \leq g(1) \leq 0 = b \leq g(\,) \leq 1$:
$\exists a \in [0,1] : g(a) = f(a) - a = 0 \Leftrightarrow \boxed{\exists a \in [0,1] : f(a) = a}$ ▪



Sans l'hypothèse de continuité, on ne peut pas appliquer le TVI et on peut imaginer une fonction du type ci-dessus où $\nexists a \in [0,1] : f(a) = a$.

Rq : On ne peut pas appliquer le TVI directement sur f car on pourrait avoir $f \neq$ constante et par ex $f(0) = f(1) \neq a$, d'où $\forall b \in [f(0), f(1)]$ (ie $b = f(0) \neq a$) $\exists a \in [0,1] \mid f(a) = b = f(0) \neq a$ ...

Exercice 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$:
Par définition de la limite en $-\infty$, $\exists a, M \in \mathbb{R}, \forall x \leq a$, $f(x) \leq -M \leq 0$
$+\infty$, $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \geq b$, $f(x) \geq M \geq 0$

On $*$ f est continue sur $[a,b]$
$*$ $f(a) \leq 0$
$*$ $f(b) \geq 0$

Donc d'après le TVI, $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0$ ▪

Dans le cas des polynômes de degré impair, $f(x) = ax^d + Q_{d-1}(x)$, on a

$*$ f polynôme $\Rightarrow$ continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^d = +\infty$

$*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^d = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^{2\tilde{d}} \times x = -\infty$

On applique donc le résultat précédent et pour toute fonction polynômiale de degré impair, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11:

Dérivée de f:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (2x-1)^3$

Soit $x \in \mathbb{R}$. f est de la forme u^n:

$$f'(x) = 3 \times 2 \times (2x-1)^2$$

ie $\boxed{f'(x) = 6(2x-1)^2}$

2) $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \left(\frac{x+2}{1-x}\right)^4$

Soit $x \in [2, +\infty[$. f est de la forme g^n où $g = \frac{u}{v}$.

Calculons g':

$$g'(x) = \frac{1(1-x) - (-1)(x+2)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

Du coup,

$$f'(x) = 4 \times \frac{3}{(1-x)^2} \times \left(\frac{x+2}{1-x}\right)^3 \quad \text{ie} \quad \boxed{f'(x) = 12\,\frac{(x+2)^3}{(1-x)^5}}.$$

3). $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. f est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u = \sqrt{w}$.

On a tout d'abord

$$u'(x) = \frac{w'}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

D'où

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\left(1+\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2(1+\sqrt{x})^2}\left[\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= \frac{1}{2(1+\sqrt{x})^2}\ \frac{\sqrt{x}+\cancel{x}-(1+\cancel{x})}{\sqrt{x(1+x)}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x(1+x)}}}$$

Exercice 3:

Majoration / Minoration / Encadrement de f:

1) $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}$

Soit $x \in]0,+\infty[$. On a

$$f(x) = \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x^2}{x+1}$$

Or $\left.\begin{array}{l} x>0 \Rightarrow x^2>0 \\ x+1>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2}{x+1} > 0$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$

Donc $\boxed{f \text{ est minorée sur } \mathbb{R}^*_+.}$

2) $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x} - x$

Regardons les variations de f:

$\sqrt{1+x}$ est de la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = 1+x$, $u'(x) = 1$.

Donc

$\sqrt{1+x}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ d'où $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \dfrac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)} - 1$

Or

$\forall x \geq 0$, $\sqrt{1+x} < 2(1+x) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)} < 1$ et donc $\forall x \geq 0$, $f'(x) < 0$.

On en déduit le tableau de variations de f:

x	0	$+\infty$
f'	$-$	
f	1 ↘	

Donc $\boxed{f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}_+.}$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x > 0$, $x^2+1 \geq x$ (en effet, $x \geq 1 \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow x^2+1 > x$
et $0 < x \leq 1 \Rightarrow x \leq 1 \leq 1+x^2$ car $x^2 \geq 0$).

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{x}$

Du coup,

$\forall x > 0, \quad \frac{3x}{x^2+1} \leq \frac{3x}{x} \leq 3$

* Si $x < 0$, $\quad x^2+1 \geq |x| \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{|3x|}{x^2+1} \leq \frac{|3x|}{|x|}$

Du coup,

$\forall x < 0, \quad \frac{-3x}{x^2+1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{3x}{x^2+1} \geq -3$

(On vérifie qu'en 0, on est bien entre 3 et -3 : $f(0) = 0$).

Donc $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$

Exercice 10 :

Dérivabilité en 0.

1) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On regarde

* $\lim\limits_{h \to 0^>} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^>} \frac{h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^>} h = 0$

* $\lim\limits_{h \to 0^<} \frac{-h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^<} -h = 0$

On a $\lim\limits_{h \to 0^>} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^<} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0.}$

3) $f(x) = \frac{|x^3|}{1 + |x^2 - 1|}$

On regarde

* $\lim\limits_{h \to 0^>} \frac{h^3/1+|h^2-1| - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^>} \frac{h^2}{1 - h^2 + 1} = \lim\limits_{h \to 0^>} \frac{h^2}{2 + h^2} = 0$

* $\lim\limits_{h \to 0^<} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \text{idem} = 0$

On a $\lim\limits_{h \to 0^<} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^>} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0.}$

Exercice 5 :

Continuité en 0 :

2) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

On a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \pm\infty \\ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} + 1 = \pm\infty \\ \text{Et } \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ par quotient, } \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

Exercice 16 :

* Variations de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3+10x}{x^2+1}$:

On étudie le signe de la dérivée de f (f est dérivable sur $\mathbb{R}$).

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3+10x \Rightarrow u'(x) = 3x^2+10 \\ v(x) = x^2+1 \Rightarrow v'(x) = 2x \end{cases}$

On a donc

$$f'(x) = \frac{(3x^2+10)(x^2+1) - (x^3+10x)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 13x^2 + 10 - 2x^4 - 20x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2+1)^2}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 \geq 0$. Le signe de f' dépend donc du signe du numérateur.

On pose $X = x^2$. Alors

$$x^4 - 7x^2 + 10 = X^2 - 7X + 10$$

$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles simples

On a

$$X_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Donc $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x_3 = \sqrt{5} \\ x_4 = -\sqrt{5} \end{cases}$

On en déduit donc le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	$f(-\sqrt{5})$	↘	$f(-\sqrt{2})$	↗	$f(\sqrt{2})$	↘	$f(\sqrt{5})$	↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+10x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+10x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

* Asymptote oblique en $+\infty$:

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Regardons si f admet une asymptote oblique en $+\infty$:

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+10x}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$

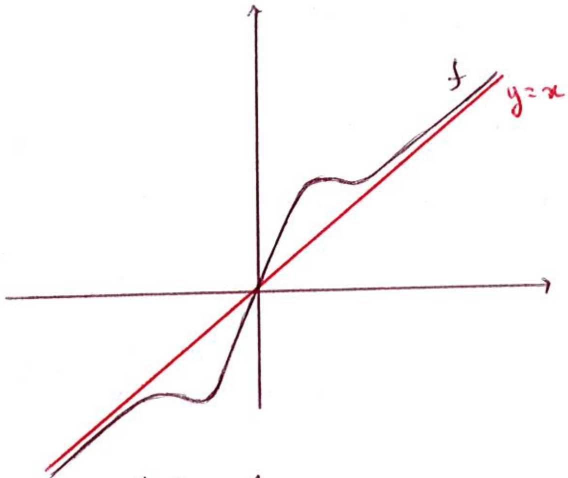
* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+10x - x(x^2+1)}{x^2+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}+10x-\cancel{x^3}-x}{x^2+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x}{x^2+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x}{x^2}$

$= 0^+$



Donc Γ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x$.
Comme de plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0^+ > 0$, alors Γ est au-dessus de son asymptote.
Rq: La fonction f étant impaire, la droite d'équation $y = x$ est aussi une asymptote oblique de Γ en $-\infty$.

Exercice 17:

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

1) $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x}$

On regarde
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1-\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$

Et
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} 1 - \sqrt{x} = -\infty \notin \mathbb{R}$

Donc Γ n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

2) $f(x) = x - 2 + \frac{x+1}{x-1}$

On regarde
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} + \frac{x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{1+\frac{1}{x}}{x-1} = 1$

Et
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -2 + \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} -2 + \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = -1$

Donc Γ admet en $+\infty$ une asymptote oblique $\mathcal{D}: y = x-1$.

Etudions maintenant la position de Γ par rapport à $\mathcal{D}$:

$$f(x)-(x-1) = x-2+\frac{x+1}{x-1}-(x-1) = -1+\frac{x+1}{x-1}$$

Or quand $x>0$, $x+1 > x-1 \iff \frac{x+1}{x-1} > 1 \iff \frac{x+1}{x-1}-1>0$.

D'où $f(x)-(x-1)>0$ (en $+\infty$).

On en déduit donc que Γ est au-dessus de $\mathcal{D}$.

3) $f(x) = 3x+2-\sqrt{4x^2-x}$

On regarde

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x}-\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(3+\frac{2}{x})}{\cancel{x}}-\frac{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3+\frac{2}{x}-\sqrt{4-\frac{1}{x}}$$

$$= 3-2$$

$$= 1$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} 2x+2-\sqrt{4x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x+2-\sqrt{4x^2-x}\right)\left(2x+2+\sqrt{4x^2-x}\right)}{2x+2+\sqrt{4x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+8x+4-\cancel{4x^2}+x}{2x+2+\sqrt{4x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{9x+4}{2x+2+\sqrt{4x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(9+\frac{4}{x})}{\cancel{x}\left[2+\frac{2}{x}+\frac{|x|}{x}\sqrt{4-\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \frac{9}{4}$$

Donc Γ admet en $+\infty$ une asymptote oblique $\mathcal{D}: y = x+\frac{9}{4}$.

Etudions maintenant la position de Γ par rapport à $\mathcal{D}$.

$$f(x)-\left(x+\frac{9}{4}\right) = 2x-\frac{1}{4}-\sqrt{4x^2-x} = x\left[2-\frac{1}{4x}-\underbrace{\frac{|x|}{x}}_{=1\ \forall x>0}\sqrt{4-\frac{1}{x}}\right] = x\,\frac{\cancel{4}-\cancel{\frac{1}{x}}+\frac{1}{16x^2}-\cancel{4}+\cancel{\frac{1}{x}}}{2-\frac{1}{4x}+\sqrt{4-\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{1}{16x\left[2-\frac{1}{4x}+\sqrt{4-\frac{1}{x}}\right]}$$

Or $\forall x>1$, $16x>0$ et $\frac{1}{x}<1 \iff -\frac{1}{x}\ -1$ donc $\sqrt{4-\frac{1}{x}}>1$ ie $2+\sqrt{4-\frac{1}{x}}>3$ et $-\frac{1}{4x}>-\frac{1}{4}$.

D'où $2-\frac{1}{4x}+\sqrt{4-\frac{1}{x}} > \frac{11}{4} > 0 \Rightarrow f(x)-\left(x+\frac{9}{4}\right)>0$

Alors Γ est au-dessus de $\mathcal{D}$.