# MATH 121-b TD2

## Exercice 1 :

Division euclidienne de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$
$g(x) = 2x + 3$

On calcule :

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +x^2 & -x & +3 & 2x+3 \\
\cline{5-5}
-(2x^3 & +3x^2 & & ) & x^2 - x + 1 \\
\hline
 & -2x^2 & -x & +3 & \\
 & -(-2x^2 & -3x & ) & \\
\cline{2-4}
 & & 2x & +3 & \\
 & & -(2x & +3) & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

On vérifie :

$(2x+3)(x^2 - x + 1)$
$= 2x^3 - 2x^2 + 2x + 3x^2 - 3x + 3$
$= 2x^3 + x^2 - x + 3$

Donc $\boxed{2x^3 + x^2 - x + 3 = (2x+3)(x^2 - x + 1)}$

2) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$
$g(x) = x^3 + x^2 + 2$

On calcule

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +x^4 & -x^3 & & +x & -1 & x^3 + x^2 + 2 \\
\cline{7-7}
-(x^5 & +x^4 & & +2x^2 & & ) & x^2 - 1 \\
\hline
 & & -x^3 & -2x^2 & +x & -1 & \\
 & & -(-x^3 & -x^2 & & -2) & \\
\cline{3-6}
 & & & -x^2 & +x & +1 &
\end{array}$$

On vérifie :

$(x^3 + x^2 + 2)(x^2 - 1) - x^2 + x + 1$
$= x^5 - x^3 + x^4 - x^2 + 2x^2 - 2 - x^2 + x + 1$
$= x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$

Donc $\boxed{\begin{array}{c} x^5 + x^4 - x^3 + x - 1 = (x^3 + x^2 + 2)(x^2 - 1) \\ -x^2 + x + 1 \end{array}}$

3) $f(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 2x^2 + 7x + 4$
$g(x) = x^5 + 2$

Alors $\begin{cases} q(x) = x^2 + 2x + 3 \\ r(x) = 3x - 2 \end{cases}$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 2x^2 + 7x + 4 \\ = (x^5 + 2)(x^2 + 2x + 3) + 3x - 2 \end{array}}$

Exercice 2 :

Factoriser $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et donner son signe.

1) $\boxed{f(x) = 4(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)}$

2) $f(x) = x^4 + x^2 - 6$

On pose $X = x^2$. Alors

$$x^4 + x^2 - 6 = X^2 + X - 6$$

Pour factoriser ce trinôme, on cherche ses racines :

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles simples

$X_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $X_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

On en déduit une factorisation de $f$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= (X - X_1)(X - X_2) \\ &= (X-2)(X+3) \\ &= (x^2-2)(x^2+3) \end{aligned}$$

$\boxed{f(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+3)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Etudions le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$ :

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$
* $x - \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{2}$
* $x + \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-\sqrt{2}$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+\sqrt{2}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3) $\boxed{f(x) = 2x(x-1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

4) $$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 + 2x^3 - 2x - 2 \\ &= 2(x^4 + x^3 - x - 1) \end{aligned}$$

On remarque que

* $f(1) = 2(1+1-1-1) = 0$
* $f(-1) = 2(1-1+1-1) = 0$

Donc $1$ et $-1$ sont des racines évidentes du polynôme $f$, que l'on écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-1)(x+1)(ax^2+bx+c), \quad a,b,c \in \mathbb{R} \text{ à déterminer} \\ &= 2(x^2-1)(ax^2+bx+c) \\ &= 2\left[ax^4 + bx^3 + (c-a)x^2 - bx - c\right] \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c - a = 0 \\ -b = -1 \\ -c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{f(x) = 2(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Regardons si on peut factoriser $x^2+x+1$ :

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ pas de racine réelle

On a donc

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$ (signe de $a = 1 > 0$)
* $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
* $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Du coup,

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## Exercice 4 :

$a = \ln 2$

1) $A = \ln 8 = \ln(2^3) = 3\ln 2 = \boxed{3a}$

2) $B = \ln\left(\frac{1}{16}\right) = \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0} - \ln 16 = -\ln(2^4) = -4\ln 2 = \boxed{-4a}$

3) $C = \frac{\ln 64}{4} = \frac{\ln(8 \times 8)}{4} = \frac{\ln(2^3 \times 2^3)}{4} = \frac{\ln(2^6)}{4} = \frac{6\ln 2}{4} = \boxed{\frac{3}{2}a}$

## Exercice 5 :

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$ :

1) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

On pose $X = \ln x$. On cherche alors les solutions de

$X^2 - 2X - 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles simples.

$X_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$

Alors $x_1 = e^{X_1} = e^{-1}$ et $x_2 = e^{X_2} = e^3$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{e}, e^3\right\}}$.

2) $e^{x(x-1)} = 1$

On sait que $e^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$.

On cherche donc les solutions de $x(x-1) = 0$, ie $x = 0$ ou $x = 1$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0, 1\}}$.

3) $e^{-2x} - 2e^{-x} - 3 = 0$

On pose $X = e^{-x}$. On cherche alors les solutions de $X^2 - 2X - 3 = 0$, qui sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 3$ d'après 1).

On a donc

$X_2 = e^{-x_2}$ (car $X_1 = -1 = e^{-x_1}$ impossible)

$\Leftrightarrow \ln 3 = -x_2$

$\Leftrightarrow x_2 = -\ln 3$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-\ln 3\}}$.

4) $2^{1+x} - 2^{1-x} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \times 2^x - 2 \times 2^{-x} - 3 = 0$

On pose $X = 2^x$. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x = e^{x\ln 2} \neq 0$. On a alors

$2X - \dfrac{2}{X} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2X^2 - 2 - 3X = 0 \quad (\text{car } X \neq 0)$

On cherche les solutions de l'équation $2X^2 - 3X - 2 = 0$.

$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow$ 2 racines simples réelles

$X_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$

D'où $2^x = X_1 \Leftrightarrow e^{x\ln 2} = -\dfrac{1}{2} \rightsquigarrow$ impossible car $\exp > 0$

et $2^x = X_2 \Leftrightarrow e^{x\ln 2} = 2 \Leftrightarrow x\ln 2 = \ln 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$

Remarque : On vérifie aisément que $f'(x) = 2\ln 2\left(e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2}\right) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ce qui implique que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $\exists! \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = 0$.

# Exercice 6 :

Calculer les limites :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln(\sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln(x^{1/2}) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2} x^3 \ln x$

On pose $t = \frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. On a alors

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} x^3 \ln x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{t^3} \ln\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{t^3} \times (-\ln t)$$
$$= \lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{2t^2} \times \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\to 0 \text{ d'après } ②}$$

$$= 0$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

On pose $X = \sqrt{x}$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{X \to 0^+} \ln(X^2) + \frac{1}{X}$$
$$= \lim_{X \to 0^+} 2 \ln X + \frac{1}{X}$$

On pose maintenant $t = \frac{1}{X} \left(= \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. On obtient

$$\lim_{X \to 0^+} 2 \ln X + \frac{1}{X} = \lim_{t \to +\infty} 2 \ln \frac{1}{t} + t = \lim_{t \to +\infty} -2\ln t + t = \lim_{t \to +\infty} t\Big[-2\underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\to 0 \text{ d'après } ②} + 1\Big] = +\infty$$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln^2 x - \ln x - x$

On pose $X = \sqrt{x}$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \ln^2 x - \ln x - x = \lim_{X \to +\infty} \ln^2(X^2) - \ln(X^2) - X^2$$
$$= \lim_{X \to +\infty} 4\ln^2 X - 2 \ln X - X^2$$
$$= \lim_{X \to +\infty} X^2\Big[4 \frac{\ln^2 X}{X^2} - 2 \frac{\ln X}{X^2} - 1\Big]$$
$$= \lim_{X \to +\infty} X^2\Big[4\Big(\underbrace{\frac{\ln X}{X}}_{\to 0 \text{ d'après } ②}\Big)^2 - \frac{2}{X}\Big(\underbrace{\frac{\ln X}{X}}_{\to 0 \text{ d'après } ②}\Big) - 1\Big] = -\infty$$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{x/3}}{x}\right]^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x/3}}{3 . \frac{x}{3}}\right)^3$

On pose $X = \frac{x}{3}$. On a alors

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x/3}}{3 . \frac{x}{3}}\right)^3 = \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{1}{3} \frac{e^X}{X}\right]^3 = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{27}\Big[1 \Big/ \underbrace{\frac{X}{e^X}}_{\to 0 \text{ d'après } ④}\Big]^3 = +\infty$$

## Limites connues :

① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

③ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

④ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

⑤ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - (1+ax)}{x^2} = \frac{a(a-1)}{2}$

⑥ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

⑦ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

⑧ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^2} = 0$

5) $\lim_{x \to -\infty} 2x - 1 - e^x = -\infty$ (pas de fi !)

6) $\lim_{x \to +\infty} 2x - 1 - e^x = \lim_{x \to +\infty} x\left[2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right] = -\infty$

$\rightarrow +\infty$ par inverse de (4)

7) $\lim_{x \to +\infty} \ln x - x^2 - e^x = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - x - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

$\frac{\ln x}{x} \to 0$ d'après (2) ; $\frac{e^x}{x} \to +\infty$ par inverse de (4)

8) $\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^2 x^4 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \exp\left[\ln\left(\ln^2 x \cdot x^4 e^{-x}\right)\right]$

Regardons

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left[\ln^2 x \cdot x^4 e^{-x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \ln(\ln^2 x) + \ln x^4 + \ln e^{-x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 2\ln(\ln x) + 4\ln x - x$$

On pose $X = \ln x$ ($\Leftrightarrow x = e^X$). On a

$$\lim_{x \to +\infty} 2\ln(\ln x) + 4\ln x - x = \lim_{X \to +\infty} 2\ln X + 4X - e^X$$
$$= \lim_{X \to +\infty} e^X\left[2\frac{\ln X}{e^X} + 4\frac{X}{e^X} - 1\right]$$
$$= \lim_{X \to +\infty} e^X\left[2\frac{\ln X}{X}\frac{X}{e^X} + 4\frac{X}{e^X} - 1\right]$$
$$= -\infty$$

$\frac{\ln X}{X} \to 0$ d'après (2) ; $\frac{X}{e^X} \to 0$ d'après (4) ; $\frac{X}{e^X} \to 0$ d'après (4)

Du coup, comme $\lim_{Y \to -\infty} e^Y = 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^2 x^4 e^{-x} = 0$$

9) $\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} \ln x$

On pose $X = \frac{1}{x}$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} \ln x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \to +\infty} -e^{-X} \ln X = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{e^X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X}\frac{X}{e^X} = 0$$

$\to 0$ d'après (4) ; $\frac{\ln X}{X} \to 0$ d'après (2) ; $\frac{X}{e^X} \to 0$ d'après (4)

10) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x - x}{2x - e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}(2 - x/e^x)}{\cancel{e^x}(2x/e^x - 1)} = -2$

$\to 0$ d'après (4)

11) $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b}$ avec $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x\ln a}}{e^{b\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln a - b\ln x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x\left[\ln a - b\frac{\ln x}{x}\right]} = +\infty$$

$\frac{\ln x}{x} \to 0$ d'après (2)

12) $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x\ln x}$

On pose $X = \frac{1}{x}$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{X \to +\infty} e^{\frac{1}{X}\ln\frac{1}{X}} = \lim_{X \to +\infty} e^{-\frac{\ln X}{X}} = 1$$

$\frac{\ln X}{X} \to 0$ d'après (2)

13) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

On pose $X = \frac{1}{x}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{X\to 0^{>}} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}$$

On remarque que

$$\frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{\ln(1+X)-\ln(1)}{X-0} = \frac{f(X)-f(0)}{X-0} \quad \text{où } f(X)=\ln(1+X)$$

Et donc

$$\lim_{X\to 0^{>}} \frac{\ln(1+X)}{X} = f'(0) \quad (\text{taux d'accroissement}).$$

Or $f'(X) = \dfrac{1}{1+X} \Rightarrow f'(1) = 1.$

D'où

$$\lim_{X\to 0^{>}} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

Et du coup

$$\lim_{X\to 0^{>}} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e$$

15) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+2x^2-x}{x-1+e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x-1+e^{-x}} + \frac{2x^2}{x-1+e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\,\frac{x^2}{x-1+e^{-x}} + 2\,\frac{x^2}{x-1+e^{-x}}$$

Or si on pose $X=-x$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-1+e^{-x}} = \lim_{X\to 0} \frac{X^2}{-X-1+e^{X}} = 2$$ par inverse de ③

D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\,\frac{x^2}{x-1+e^{-x}} + 2\,\frac{x^2}{x-1+e^{-x}} = -\frac{1}{2}\times 2 + 2\times 2 = 3$$

$\to -\frac{1}{2}$ d'après ①

Exercice 7 :

1) $f : ]1,+\infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

$f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. On remarque que

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

Donc $f$ est la différence de 2 fonctions du type $\ln(u)$, et on sait que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

D'où

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(\cancel{x}+1)-(\cancel{x}-1)}{(x+1)(x-1)}$$

ie $$\boxed{f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}}$$

2) $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{(4x+2)^3}$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et est de la forme $\dfrac{u}{v}$, où $v = w^3$, avec

$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$w(x) = 4x+2 \Rightarrow w'(x) = 4$ et donc $v(x) = w^3 \Rightarrow v'(x) = 3\times 4(4x+2)^2 = 12(4x+2)^2$

On a donc

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}(4x+2)^3 - \ln x \times 12(4x+2)^2}{(4x+2)^6}$$

$$= \frac{\cancel{(4x+2)^2}\left[\frac{4x+2}{x} - 12\ln x\right]}{(4x+2)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4x+2-12x\ln x}{x(4x+2)^4}}$$

3) $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2^x}{e^{\sqrt{x}}} = \dfrac{e^{x\ln 2}}{e^{\sqrt{x}}} = e^{x\ln 2 - \sqrt{x}}$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et est de la forme $e^u$, avec

$u(x) = x\ln 2 - \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \ln 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

On a donc

$$f'(x) = u'e^u = \boxed{\left(\ln 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{x\ln 2 - \sqrt{x}} = \left(\ln 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{2^x}{e^{\sqrt{x}}}}$$

Exercice 8 :

* $A = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On remarque que $\frac{\pi}{8}\times 2 = \frac{\pi}{4}$, donc on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\times 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

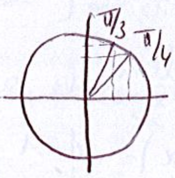
En particulier pour $x = \frac{\pi}{8}$, donc $\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8}$.

Du coup,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos^2\frac{\pi}{8} - \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

Ce qui nous donne finalement

$$\boxed{A = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}}$$



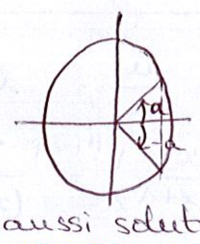

* $B = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}$. Donc

$$B = \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = B}$$

Exercice 10 :

1) $\cos x = \cos a$, $a \in \mathbb{R}$.



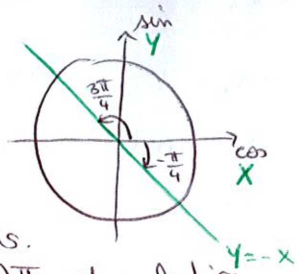

Comme $\cos(a) = \cos(-a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $x = a$ et $x = -a$ sont des solutions de l'équation.

Mais on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

Donc $x = a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $x = -a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont aussi solutions.

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \{a + 2k\pi, -a + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}}$$




2) $\cos x + \sin x = 0 \iff \sin x = -\cos x$
$\quad\quad Y = -X$

$x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$ sont solutions de l'équation.

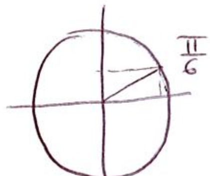
Donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ sont solutions.

On remarque de plus que $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, d'où $x = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ est solution.

Donc il suffit de faire des "moitiés de tours" en partant de $-\frac{\pi}{4}$, autrement dit prendre $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pour couvrir toutes les solutions.

Finalement,

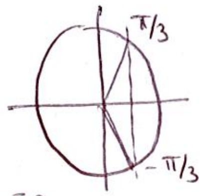
$$\boxed{\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}}.$$




3) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$$\iff \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\iff \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$$




Or $\cos(X) = \frac{1}{2} \iff X = \frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$. (dans $[-\pi, \pi[$).

Donc

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \\ \text{ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ \text{ou } x = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{dans } [-\pi, \pi[).$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}}$$

4) $\sin x + \sin(2x) = \sin(3x)$

On a

$*$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$*$ $\sin(3x) = \sin(x + 2x)$

$$= \sin(x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(x)$$
$$= \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + (2\sin x\cos x)\cos x$$
$$= \sin x((1 - \sin^2 x) - \sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$= \sin x + 2\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= \sin x + 2\sin x\cos(2x)$$

En remplaçant dans l'équation de départ, on cherche donc à résoudre

$$\cancel{\sin x} + \cancel{2}\sin x\cos x = \cancel{\sin x} + \cancel{2}\sin x\cos(2x)$$

$\iff \sin x\cos x - \sin x\cos(2x) = 0$

$\iff \sin x(\cos x - \cos(2x)) = 0 \quad (E)$

$\iff \sin x = 0$ ou $\cos x - \cos(2x) = 0$ (équation produit nul)

$\iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\cos x = \cos(2x)$

Résolvons $\cos x = \cos(2x)$ :

$\cos x = \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

$\iff 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

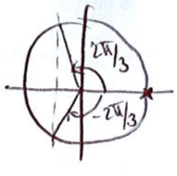
On pose $X = \cos x$. On cherche les racines du trinôme $2X^2 - X - 1$ :

$\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 > 0 \rightarrow$ 2 racines réelles simples

$X_1 = \frac{+1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{1+3}{4} = 1$

Donc les solutions de $\cos x = \cos(2x)$ sont les $x_1$ et $x_2$ qui vérifient

$X_1 = \cos x_1 = -\frac{1}{2}$ donc $x_1 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$




$X_2 = \cos x_2 = 1$ donc $x_2 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, on souhaitait résoudre (E), et on a montré que

$$(E)\ \sin x(\cos x - \cos(2x)) = 0 \iff \underbrace{x = k\pi \text{ ou } x = 2k\pi}_{x = k\pi} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ k\pi,\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

5) $3\tan x = 2\cos x \iff 3\,\frac{\sin x}{\cos x} = 2\cos x$

$\iff 3\sin x = 2\cos^2 x$

$\iff 3\sin x = 2(1 - \sin^2 x)$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\iff 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

On pose $X = \sin x$. On cherche les racines du trinôme $2X^2 + 3X - 2$ :

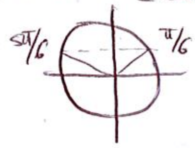
$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \rightarrow$ 2 racines réelles simples

$X_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$ et $X_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

Donc les solutions de notre équation sont les $x_1$ et $x_2$ qui vérifient

$X_1 = \sin x_1 = -2$ donc $x_1$ n'existe pas ! $(\forall x,\ -1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1)$.

$X_2 = \sin x_2 = \frac{1}{2}$ donc $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$




Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Exercice 11 :

1) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos^4\left(\frac{1}{x^2}\right)$

On sait que $\forall X \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos X \leq 1$.

En particulier pour $X = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$, d'où

$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$

$0 \leq \cos^4\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$

$$\iff \begin{cases} 0 \leq x^3 \cos^4\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 \geq x^3 \cos^4\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Or

$\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$.

Donc dans les 2 cas, $x^3 \cos^4\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est compris entre 0 et $x^3$, qui tend vers 0 quand $x$ tend vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to 0} x^3 \cos^4\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}}$

De même que précédemment, $\forall x \neq 0$,

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \text{ donc } 0 \leq 2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 \\ -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \text{ donc } -1 \leq -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \end{array}\right\} \text{ donc } -1 \leq \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{x} \leq 3$$

et donc $\frac{2}{x+\sqrt{x}} \leq \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}} \leq \frac{6}{x+\sqrt{x}}$

On $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2}{x+\sqrt{x}} = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}}$ est toujours supérieure quand $x\to0^+$ à une fonction qui tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}} = +\infty .$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{2-\sin x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{2}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)}$

On $\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leq \sin x\leq 1$

donc pour $x>0$, $-\dfrac{1}{x}\leq \dfrac{\sin x}{x}\leq \dfrac{1}{x}$.

On $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Du coup,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}-\dfrac{\sin x}{x} = 0^+ \end{array}\right\} \text{ par quotient, } \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{\frac{2}{x}-\frac{\sin x}{x}} = +\infty .$$

(le + vient du fait que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin x\leq 1<2$ donc $2-\sin x>0$).

4) $\lim\limits_{x\to0} (1+\sin x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\sin x}{x}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}$

* Calculons $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}$ :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x - x + x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x} + 1 = \lim_{x\to0} x\,\frac{\sin x - x}{x^2} + 1 = 1$$

$\to 0$ d'après ⑦

* Calculons $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$ :

On pose $X = \sin x \xrightarrow[x\to0]{} 0$. On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction $f : X \mapsto \ln(1+X)$, donné par

$$f'(0) = \lim_{X\to0} \frac{f(X)-f(0)}{X-0} = \lim_{X\to0} \frac{\ln(1+X)-\ln(1+0)}{X-0} = \lim_{X\to0} \frac{\ln(1+X)}{X}$$

On $f'(X) = \dfrac{(1+X)'}{1+X} = \dfrac{1}{1+X}$ donc $f'(0)=1$.

Et donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1$.

Finalement,

$$\lim_{x\to0} e^{\frac{\sin x}{x}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}} = e$$

5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\,\dfrac{x^2}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)^2$

Calculons $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}$ :

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\tan x + x - x}{x} = \lim_{x\to0} x\,\frac{\tan x - x}{x^2} + 1 = 1$$

$\to 0$ d'après ⑧

Donc par inverse, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$.

Finalement,

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$\to \frac{1}{2}$ d'après ⑥

6) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x \,.\, \ln(\cos x)}$

On a

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \ln(\cos x) = \ln 1 = 0 \\ &\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ par produit, } \lim_{x\to 0} \sin x \,.\, \ln(\cos x) = 0$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x \,.\, \ln(\cos x)} = e^0 = 1$$

Exercice 12:

1) $f(x) = \dfrac{\cos^3(2x)}{\sqrt[3]{3x+1}} = \dfrac{\cos^3(2x)}{(3x+1)^{1/3}}$

$f$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = \cos^3(2x)$ et $v(x) = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$.

* Calculons $u'$:

$u$ est de la forme $(u_1)^n$ avec $u_1(x) = \cos(2x) \to u_1'(x) = -2\sin(2x)$ et $n = 3$.

Donc

$$u'(x) = n\, u_1'(x)\, u_1^{n-1}(x) = 3 \times (-2\sin(2x)) \cos^2(2x) = -3\big(2\sin(2x)\cos(2x)\big)\cos(2x)$$
$$= -3\sin(4x)\cos(2x)$$

* Calculons $v'$:

$v$ est de la forme $(v_1)^n$ avec $v_1(x) = 3x+1 \to v_1'(x) = 3$ et $n = \dfrac{1}{3}$.

Donc

$$v'(x) = \frac{1}{3} \times 3 \times (3x+1)^{\frac{1}{3}-1} = (3x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

* Finalement,

$$f'(x) = \frac{-3\sin(4x)\cos(2x)(3x+1)^{1/3} - \cos^3(2x)(3x+1)^{-2/3}}{(3x+1)^{2/3}}$$

$$= \frac{-\cancel{(3x+1)^{1/3}}\left[3\sin(4x)\cos(2x) + \cos^3(2x)(3x+1)^{-1}\right]}{(3x+1)^{\cancel{2/3}\,1/3}}$$

$$= -\frac{3\sin(4x)\cos(2x) + \dfrac{\cos^3(2x)}{3x+1}}{(3x+1)^{1/3}}$$

$$= -\frac{3(3x+1)\sin(4x)\cos(2x) + \cos^3(2x)}{(3x+1)^{4/3}}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3(3x+1)\sin(4x)\cos(2x) + \cos^3(2x)}{\sqrt[3]{(3x+1)^4}}}$$

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}$

$f$ est de la forme $\sqrt{w}$, où $w = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 1 + \sin^2 x$ et $v(x) = 1 + \cos^2 x$.

Alors

$u'(x) = 2 \times \cos x \times \sin x$ et $v'(x) = 2 \times (-\sin x) \times \cos x = -2\cos x \sin x$.

Du coup,

$$w'(x) = \frac{2\cos x \sin x(1+\cos^2 x) + 2\cos x \sin x(1+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2} = \frac{2\cos x \sin x(2 + \overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1})}{(1+\cos^2 x)^2} = \frac{6\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)^2}$$

Finalement,

$$f'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \frac{\frac{6\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}} = \frac{6\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} = \boxed{\frac{3\cos x \sin x}{\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}\sqrt{1+\sin^2 x}} = f'(x)}$$

3) $f(x) = (1+x^2)^{\cos(x^3)} = e^{\cos(x^3)\ln(1+x^2)}$

$f$ est de la forme $e^u$, avec $u = v \times w$, où $v(x) = \cos(x^3)$ et $w(x) = \ln(1+x^2)$.

Donc

$$v'(x) = -(x^3)'\sin(x^3) = -3x^2\sin(x^3)$$

$$w'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

D'où

$$u'(x) = -3x^2\sin(x^3)\ln(1+x^2) + \cos(x^3)\,\frac{2x}{1+x^2}$$

Et finalement,

$$\boxed{f'(x) = \left[\frac{2x\cos(x^3)}{1+x^2} - 3x^2\sin(x^3)\ln(1+x^2)\right]e^{\cos(x^3)\ln(1+x^2)}}$$