Correction exercice

Exercice 1 :

Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = (x + e^x)^2$.

On sait que le DL en 0 à l'ordre 3 de e^x est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc

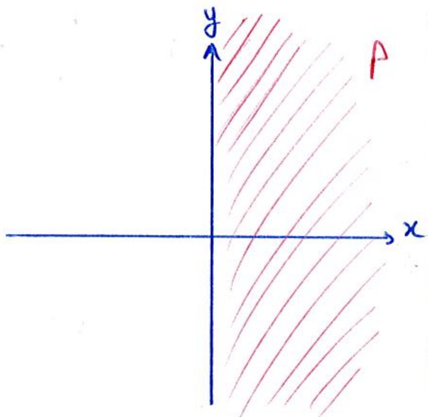
$$\begin{aligned} f(x) &= (x + e^x)^2 \\ &= x^2 + 2x e^x + e^{2x} \\ &= x^2 + 2x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3)\right) \\ &= x^2 + 2x + 2x^2 + x^3 + 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 1 + 4x + 5x^2 + \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)}$$

Exercice 2 :

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1) Soit $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \right\}$. P est-il un sev de $\mathbb{R}^3$?



Dessin de P dans le plan (xOy) correspondant à une vue de "dessus" de P dans $\mathbb{R}^3$

Le dessin ci-contre nous laisse entrevoir que P ne sera pas un sev de $\mathbb{R}^3$ car il ne sera pas stable par multiplication par un scalaire.

Vérifions :

① $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie bien $0 \geq 0$ donc $\vec{0} \in P$.

② Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in P$.

Alors

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ vérifie $\underbrace{\underbrace{x}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } \vec{u} \in P}} + \underbrace{x'}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } \vec{v} \in P}}}_{\substack{\text{la somme de nombres } \geq 0 \\ \text{est } \geq 0}} \geq 0$

Donc $\forall \vec{u}, \vec{v} \in P$, $\vec{u} + \vec{v} \in P$.

③ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$.

Alors

$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ ne vérifie pas $\lambda x \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

En effet ; si $\lambda < 0$, $x \geq 0 \Rightarrow \lambda x \leq 0$.

Donc $\lambda \vec{u} \notin P$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall \vec{u} \in P$.

Finalement, on conclut que $\boxed{P \text{ n'est pas un sev de } \mathbb{R}^3.}$

2) Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + 2y - z = 0 \right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$:

G représente un plan dans $\mathbb{R}^3$. Donc G devrait être un sev de $\mathbb{R}^3$.

Vérifions :

① $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $0 + 2\times 0 - 0 = 0$ donc $\vec{0} \in G$.

②③ Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in G$. Et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\lambda \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \text{ vérifie } (\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z')$$

$$= \lambda \underbrace{(x + 2y - z)}_{=0 \text{ car } \vec{u} \in G} + \underbrace{(x' + 2y' - z')}_{=0 \text{ car } \vec{v} \in G} = 0$$

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in G$, $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in G$.

Finalement, on conclut que $\boxed{G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3}$.

3) Soient $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Montrer que les sous-espaces H et D sont en somme directe :

H et D sont en somme directe ssi $H \cap D = \{\vec{0}\}$.

Soit $\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H \cap D$.

Comme $\vec{w} \in D$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Et comme $\vec{w} \in H$, $2\lambda = 0$ ie $\lambda = 0$.

Donc $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

On conclut finalement que $H \cap D = \{\vec{0}\}$, ie que $\boxed{D \text{ et } H \text{ sont en somme directe}}$

b) Montrer que $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\exists \vec{u}_D \in D$, $\exists \vec{u}_H \in H$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_D + \vec{u}_H$:

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Montrons que l'on peut trouver $\vec{u}_D = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \in D$ et $\vec{u}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in H$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_D + \vec{u}_H$.

On doit résoudre le système (pour trouver λ, α et β)

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda + \alpha \\ z = \lambda + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}x \\ \alpha = y - \frac{3}{2}x \\ \beta = z - \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix}}_{\in D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ y - \frac{3}{2}x \\ z - \frac{1}{2}x \end{pmatrix}}_{\in H}}$$

c) * La décomposition est-elle unique ?

Les espaces D et H étant en somme directe, $\boxed{\text{cette décomposition est unique.}}$

* D et H sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

On a démontré que D et H sont en somme directe et que pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}$ se décompose comme la somme d'un élément ($\vec{u}_D$) de D et d'un élément ($\vec{u}_H$) de H.

Par définition, $\boxed{\text{D et H sont donc bien supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$

<u>Remarque</u>: On peut aussi écrire que

$$H = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à H donc à D+H.

De plus,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in D+H$$

Ainsi, D+H contient toutes les combinaisons linéaires de ces 3 vecteurs,

ie: $\mathbb{R}^3 \subseteq D+H$

et donc $D+H = \mathbb{R}^3$.

Comme $D \cap H = \{\vec{0}\}$, on conclut d'une autre manière que D et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.