DM

Exercice 2 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -6x + 4y + 2z \\ 3x - y + z \end{pmatrix}$$

1) Matrice de f dans la base canonique :

$$A = mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A}$$

2) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -12 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A^2 = 2A}$.

3) On en déduit sur f que $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\boxed{f\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2 \times f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$ $(f \circ f = 2f)$.

Exercice 3 :

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} \text{ base canonique}$$

1) * g isomorphisme ?

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + z \\ x - y - 2z \\ -2x + y - z \end{pmatrix}$.

g est linéaire (exercice).

Et on a

$$\operatorname{Ker} g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} = \{\vec{0}\} \quad \text{(à vérifier)}.$$

Donc g est injective.

Et d'après le théorème du rang,

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} g)$

$\Leftrightarrow 3 = \dim(\operatorname{Im} g)$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} g = \mathbb{R}^3$.

Donc g est surjective.

Finalement, $\boxed{g \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

* Inverse de g:

On peut chercher $g^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en résolvant le système donné par $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ou alors on peut inverser M:

On suppose que $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. On calcule

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On résoud les systèmes suivants:

$$\begin{cases} -4a+b+c=1 \\ a-b-2c=0 \\ -2a+b-c=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -4d+e+f=0 \\ d-e-2f=1 \\ -2d+e-f=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -4g+h+i=0 \\ g-h-2i=0 \\ -2g+h-i=1 \end{cases}$$

On obtient finalement après résolution

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}}$$

3) * $\boxed{\text{mat}_{e,\mathcal{C}}(g) = M}$ (par définition de M)

* $\text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \left(\left[g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \left[g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \left[g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \right) = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)}$

* $\text{mat}_{e,\mathcal{B}}(g) = \left(\left[g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \left[g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \left[g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \right) = \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \right)$

Or

$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On résoud le système

$$\begin{cases} -4 = \alpha+\beta+\gamma \\ 1 = \beta+\gamma \\ -2 = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De même, on montre que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

4) Matrices de passage :

$$* \ \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id) = \left(\left[id\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \left[id\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \left[id\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Pass}(\mathcal{C},\mathcal{B})}$$

$$* \ \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{C})}$$

5) $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$?

D'après la formule de changement de base,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id)$$

En effet, on a

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[r, "g_{\mathcal{B},\mathcal{B}}"] \arrow[d, "id_{\mathcal{B},\mathcal{C}}"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[r, "g_{\mathcal{C},\mathcal{C}}"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[u, "id_{\mathcal{C},\mathcal{B}}"'] \end{tikzcd}$$

d'où $g_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = id_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \circ g_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \circ id_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

Donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)}$$