
Corrigé TD 1 : Introduction, premier et second moment

1 Exercice 1

1. Être un arbre : non monotone
2. Être une forêt : décroissante
3. Contenir une copie du carré C_4 : croissante
4. Avoir une composante connexe de taille $\leq C$ pour $C > 0$: décroissante
5. Avoir un chemin induit de longueur 5 : non monotone
6. Contenir un graphe stable induit de taille 10 : décroissante
7. Être eulérien : non monotone

2 Exercice 2

- 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]^2 &= \mathbb{E}[X \mathbf{1}(X > 0)] \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[\mathbf{1}(X > 0)^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] \mathbb{P}(X > 0).\end{aligned}$$

Où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On déduit facilement l'inégalité demandée : $\mathbb{P}(X = 0) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}$.

2. Bienaymé-Tchébychev donne $\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\text{Var } X}{\mathbb{E}[X]^2} = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1$, ce qui est une borne plus faible. En pratique on montre que $\mathbb{E}[X^2] \sim \mathbb{E}[X]^2$, ce qui implique que les deux bornes en question tendent vers 0 et donc que $X \neq 0$ avec grande probabilité.
3. Par Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\right| \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - \left(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\right)^2\right| \geq \epsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \text{Var}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1\right),\end{aligned}$$

qui tend vers 0.

3 Exercice 3

Soit Z le nombre de triangles. On a $\mathbb{E}[Z] = \binom{n}{3}p^3$ donc si $p = o(1/n)$, $\mathbb{E}[Z] \rightarrow 0$ et donc $\mathbb{P}(Z > 0) \rightarrow 0$ par l'inégalité de Markov.

Pour $np \rightarrow \infty$, on doit alors considérer le second moment. On considère les paires de triangles, que l'on regroupe par le cardinal de leur intersection (3 pour le premier terme, 2 pour le second, 1 ou 0 pour le troisième).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{T_1, T_2} \mathbb{P}(T_1 \in G, T_2 \in G) \\ &= \mathbb{E}[Z] + \binom{n}{4} \binom{4}{2} 2p^5 + \left(\binom{n}{3}^2 - \binom{n}{3} - \binom{n}{4} \binom{4}{2} 2 \right) p^6.\end{aligned}$$

Le premier terme est un $O(n^3p^3)$, le suivant un $O(n^4p^5)$ et le troisième est $\leq \mathbb{E}[Z]^2$. On obtient donc

$$\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \leq O(n^3p^3) + O(n^4p^5).$$

Mais comme $\mathbb{E}[Z]^{-2} = O((np)^{-6})$,

$$\frac{\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z]^2} \leq O((np)^{-3}) + O(n^{-1}(np)^{-1}) = o(1).$$

On a donc $\mathbb{E}[Z^2] \sim \mathbb{E}[Z]^2$, ce qui permet d'appliquer la méthode du second moment pour montrer que $Z > 0$ avec grande proba.

4 Exercice 4

1. $\text{diam}(G_{n,p}) > 2$ si et seulement si il existe $x \neq y \in [n]$ tels que $x \not\sim y$ et pour tout $z \in [n]$, $z \not\sim x$ ou $z \not\sim y$.
2. Soit Z le nombre de tels paires de sommets (mauvaises paires).

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1)}{2}(1-p)(1-p^2)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}(1-p) \exp(-(n-2)(p^2 + o(p^2))).$$

On déduit que si $p \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\frac{\log n}{n}}$, $\mathbb{E}[Z] \rightarrow 0$, donc $Z = 0$ avec grande probabilité.

Réciproquement, si $p \leq (1-\epsilon)\sqrt{2\frac{\log n}{n}}$, $\mathbb{E}[Z] \rightarrow \infty$, et on doit regarder le second moment.

La somme ci-dessous sera découpée selon la taille de l'intersection $\{x_1, y_1\} \cap \{x_2, y_2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x_1 < y_1, x_2 < y_2} \mathbb{P}((x_1, y_1) \text{ et } (x_2, y_2) \text{ mauvaises paires}) \\ &= \mathbb{E}[Z] + \binom{n}{3} \binom{3}{2} (1-p)^2 (1-p^3 - 2p^2)^{n-3} + \mathbb{E}[Z]^2 \left(1 - \frac{\binom{2}{n} + \binom{n}{3} \binom{2}{3}}{\binom{n}{2}^2} \right) \\ &= \mathbb{E}[Z]^2 + o(\mathbb{E}[Z]^2).\end{aligned}$$

La méthode du second moment donne alors que $Z > 0$ avec grande proba.

5 Exercice 5

La loi du degré d'un sommet uniforme (comme celle d'un sommet fixe) dans $G_{n,p}$ est une binomiale de paramètres $n - 1$ et p .

Dans $G_{n,m}$

$$\mathbb{P}(\deg(x) = k) = \mathbb{P}(\deg(1) = k) = \frac{\binom{k}{n-1} \binom{\binom{n}{2} - n + 1}{m-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}.$$

C'est la loi hypergéométrique de paramètres $(\binom{n}{2}, m, n - 1)$. La loi hypergéométrique de paramètres (N, r, t) est la loi du nombre de boules rouges tirées quand on tire sans remise t boules parmi un ensemble de N boules dont r sont rouges.

6 Exercice 6

1. Majorer $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ par n^k et minorer $k!$ par $(k/e)^k$ suffit. La première inégalité est triviale, la deuxième vient de $k^k/k! \leq e^k$.
2. Il suffit de montrer que

$$\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right) \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}.$$

La borne supérieure provient de l'application de l'inégalité $1 + x \leq e^x$ à chaque facteur du produit. Pour la borne inférieure, on prend le logarithme.

$$\begin{aligned} \log \left(\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right) &= \sum_{i=0}^{k-1} \log \left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\frac{i}{n}}{\frac{k-1}{n}} \log \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \frac{k}{2} \log \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

où pour l'inégalité on a utilisé le fait que le logarithme, fonction concave, est au dessus de sa corde entre 0 et $\frac{k-1}{n}$. On conclut avec l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

On déduit que $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ est vrai non seulement pour k fixé mais aussi pour $k = o(\sqrt{n})$. On a en fait montré, sous la même condition, que $n(n-1) \cdots (n-k) \sim n^k$.

7 Exercice 7

1. Soit Z le nombre de stables induits de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \sum_{A \subset [n], |A| = \lceil \frac{n}{2k} \rceil} \mathbb{P}(A \text{ induit un stable}) \\ &= \binom{n}{\lceil \frac{n}{2k} \rceil} (1-p)^{\binom{\lceil \frac{n}{2k} \rceil}{2}} \\ &\leq \left(\frac{ne}{2k}\right)^{\frac{n}{2k}+1} (1-n^{1/g-1})^{n^2} = (2ke)^n e^{-n^2 n^{1/g-1}} = (2ke)^n e^{-n^{1+1/g}} = o(1). \end{aligned}$$

On a utilisé l'Exercice 6.1 puis l'inégalité $(1+x) \leq e^x$. Ensuite l'inégalité de Markov donne qu'avec grande probabilité il n'y a pas de tel stable.

2. Soit Z le nombre de cycles de longueur a .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \frac{1}{2a} \sum_{x_1, \dots, x_a \text{ distincts}} \mathbb{P}(x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_a \sim x_1) \\ &= \frac{1}{2a} n(n-1) \dots (n-a+1) p^a \leq \frac{1}{2a} n^{a+a(1/g-1)} = n^{a/g}. \end{aligned}$$

Donc si Y est le nombre de cycles de longueur $< g$,

$$\mathbb{E}[Y] \leq n^{3/g} + \dots + n^{(g-1)/g} \leq gn^{(g-1)/g}.$$

On applique l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(Y > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq \frac{gn^{(g-1)/g}}{n/4} = O(n^{-1/g}) = o(1).$$

3. Pour construire G' , on part de G et on enlève un sommet dans chaque cycle de longueur $< g$. G' est alors le graphe induit sur les sommets restants. G' ne contient alors plus de cycles de longueur $< g$.

Maintenant soit X un stable induit de G' . Alors X était déjà un stable induit de G . Donc

$$|X| \leq \left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\lceil n/2 \rceil}{k} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil.$$

4. Si G' est k -colorable, on regarde la couleur qui contient le plus de sommets. L'ensemble de ses sommets induit un stable, de taille au moins $\left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil$. Absurde.

8 Exercice 8

1. Soit Z le nombre de copies de K_4 , le graphe complet à 4 sommets.

$$\mathbb{E}[Z] = \binom{n}{4} p^6 \asymp n^4 p^6.$$

On a donc que pour $p = o(n^{-2/3})$, $\mathbb{P}(Z \geq 1) \leq \mathbb{E}[Z] = o(1)$, donc aucune copie de K_4 avec grande proba. On regarde le second moment en supposant $pn^{2/3} \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{A, B \subset [n], |A|=|B|=4} \mathbb{P}(A, B \text{ induisent } K_4).$$

On sépare selon le cardinal de $A \cup B$: $|A \cup B| \in \{4, 5, 6\}$, ou $\in \{7, 8\}$:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \binom{n}{4} p^6 + 20 \binom{n}{5} p^9 + 90 \binom{n}{6} p^{11} + \left(\binom{n}{4}^2 - 20 \binom{n}{5} - 90 \binom{n}{6} \right) p^{12}.$$

Le dernier terme est majoré par $\mathbb{E}[Z]^2$. On déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z]^2} &= O(n^{-4} p^{-6} + n^{-3} p^{-3} + n^{-2} p^{-1}) \\ &= O((pn^{2/3})^{-6} + p^{3/2} (pn^{2/3})^{-9/2} + p^2 (pn^{2/3})^{-3}) = o(1). \end{aligned}$$

Ceci permet d'appliquer la méthode du second moment et de montrer que le seuil est $n^{-2/3}$.

2. (a) Le nombre de sommets qui appartient à 2 triangles différents est borné par le nombre de copies du graphes "noeud papillon" \bowtie , plus deux fois le nombre de copies du graphe "losange" \diamond . Soit Z cette quantité.

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{|\text{Aut}(\bowtie)|} p^{6+2} + 2 \frac{n(n-1) \dots (n-3)}{|\text{Aut}(\diamond)|} p^5 = O(n^5/n^6 + n^4/n^5) = o(1).$$

D'où le résultat par la méthode du premier moment.

- (b) Soit Z le nombre de chemins induits de taille $k = \lfloor \sqrt{\log n} \rfloor$.

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1) \dots (n-k)}{2} p^k (1-p)^{\binom{k+1}{2}-k} \sim \frac{n^{k+1}}{2} (c/n)^k \times 1 \asymp nc^k.$$

Où on a utilisé l'Exercice 6 pour l'équivalent de la factorielle tombante. En tout cas on a montré que $\mathbb{E}[Z] \rightarrow \infty$. Passons au second moment.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k} \mathbb{P}(x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k \text{ chemins induits}) \\ &\leq \mathbb{E}[Z]^2 + \sum_{x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k, \text{avec des arêtes en commun}} p^{2k - \#\{\text{arêtes en commun}\}}. \end{aligned}$$

On a séparé les termes où les deux chemins sont disjoints, dont la somme est classiquement majoré par $\mathbb{E}[Z]^2$. Pour le reste, on a majoré brutalement : on compte maintenant des chemins non induits, et on a majoré le facteur en $(1-p)$ par 1. Maintenant pour $j \geq 1$, on pose $N_{k,j}$ le nombre de couples de chemins

de taille k qui ont j arêtes en commun. On majore très brutalement $N_{k,j}$ par le nombre d'ensembles de $2k + 1 - j$ points, décorés par suites de longueur $k + 1$ (vérifier que c'est légitime!).

$$N_{k,j} \leq n^{2k+1-j} (2k + 1 - j)^{2k+2} \leq n^{2k+1-j} (3k)^{3k},$$

et, en conséquence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 &\leq \sum_{j=1}^k N_{k,j} p^{2k-j} \leq \sum_{j=1}^k n^{2(k+1-j)} (3k)^{3k} p^{2k-j} \\ &\leq kn(3k)^{3k} c^{2k} = o(n^2) = o(\mathbb{E}[Z]^2). \end{aligned}$$

On peut donc appliquer la méthode du second moment.

(c) Soit Z le nombre de sommets de degré $k = \lfloor \sqrt{\log n} \rfloor$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \sum_{x \in [n]} \mathbb{P}(\deg(x) = k) \\ &= n \mathbb{P}(\text{Bi}(n-1, p) = k) \\ &= n \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &\sim n \frac{(n-1)^k}{k!} \frac{c^k}{n^k} (1-c/n)^{n-1-k} \\ &\sim \frac{nc^k e^{-c}}{k!} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x,y \in [n]} \mathbb{P}(\deg(x) = k, \deg(y) = k) \\ &= \mathbb{E}[Z] + n(n-1) \\ &\quad \times \left(p \binom{n-2}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} \right)^2 + (1-p) \left(\binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} \right)^2 \\ &= \mathbb{E}[Z] + n^2 p \frac{n^{2k-2}}{k!^2} p^{2k-2} (1-p)^{2n-2-2k} (1+o(1)) \\ &\quad + n^2 (1-p) \frac{n^{2k}}{k!^2} p^{2k} (1-p)^{2n-4-2k} (1+o(1)) \\ &= \mathbb{E}[Z] + p \mathbb{E}[Z]^2 (1+o(1)) + \mathbb{E}[Z]^2 (1+o(1)). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont des $o(\mathbb{E}[Z]^2)$, le troisième est $\sim \mathbb{E}[Z]^2$. On peut donc appliquer la méthode du second moment.