TD 3 : Phase sous-critique suite v3

Exercice 1. *Premier moment pour le nombre d'arbres en régime sous-critique*

Finir la preuve de la Proposition 6 du cours : montrer que pour $p = \frac{c}{n}$, $c \neq 1$, avec grande probabilité il n'y a aucun arbre isolé de taille $\geq \frac{1}{\alpha}(\log(n) - \frac{5}{2}\log\log(n)) + f(n)$, où $\alpha = c - 1 - \log(c)$, et $f(n) \to \infty$ lentement.

Exercice 2. *Régime sous-critique*

En utilisant les Lemmes 3 et 4, et la Proposition 6, donner la preuve du Théorème 6 du cours.

Exercice 3. *Séries génératrices exponentielles et arbres de Cayley*

Soit $t_n^* = n^{n-1}$ le nombre d'arbres enracinés sur $[n]$, et $T^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n^* \frac{x^n}{n!}$ la série génératrice exponentielle associée.

1. Montrer l'égalité suivante, pour $n \geq 2$ (indication : compter d'abord les arbres dont le degré à la racine est k)

$$t_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 \geq 1, \ldots i_k \geq 1 \\ i_1 + \ldots + i_k = n-1}} \binom{n}{1, i_1, \ldots, i_k} \prod_{j=1}^{k} t_{i_j}^*.$$

2. En déduire l'égalité suivante, pour $x > 0$:

$$T^*(x) = x e^{T^*(x)}.$$

3. Montrer que $\sum_{i=1}^{\infty} k^{k-1} \frac{e^{-k}}{k!}$ est absolument convergente. En déduire que $T^*(x)$ est analytique sur $D(0, 1/e)$ et continue au bord.
4. Déduire une preuve alternative du Lemme 5 : pour $y \in [0, 1/e]$, $T^*(y)$ est le nombre $x \in [0, 1]$ qui vérifie $x e^{-x} = y$. En particulier, $\sum_{i=1}^{\infty} k^{k-1} \frac{e^{-k}}{k!} = 1$ (cas non traité dans le lemme).

Remarque : cette méthode permet également de retrouver la formule de Cayley par inversion de Lagrange. La translation d'identités combinatoires en égalités de séries génératrices, dont l'étude permet de retrouver des formules exactes ou des développements asymptotiques est une méthode puissante dénommée combinatoire analytique.