Corrigé TD 8 : Degrés suite

Exercice 3

On suppose ici que $p = o(\log(n)/n)$. Pour $j = j(n) \geq 0$, on note $\lambda_j = \lambda_j(n) = \mathbb{E}[X_j] = n\,\mathbb{P}(\mathrm{Bi}(n-1,p) = j)$. Pour tout n on fixe $k \geq pn$ tel que $\max(\lambda_k, \lambda_k^{-1})$ soit minimal.

1. On dénote par ϕ la fonction $(0,\infty) \ni x \mapsto \max(x, 1/x)$. C'est une fonction convexe positive qui atteint son minimum global en 1.

   On commence par observer que à n fixé, $i \mapsto \lambda_i$ est croissant quand $i \leq np$ et décroissant quand $i \geq np$ (unimodalité de la loi binomiale). On va montrer que si $a \geq np$ et $a = O(np)$, alors $\lambda_a \to \infty$. Ceci implique alors que $k \gg np$. Sinon si $k = O(np)$, alors $k+1 = O(np)$ donc $\lambda_{k+1} \to \infty$. Alors à partir d'un certain rang $\lambda_k > \lambda_{k+1} \geq 1$, d'où $\phi(\lambda_{k+1}) < \phi(\lambda_k)$, contredisant l'optimalité de k.

   Faisons ce calcul. Soit a avec $a \geq np$ et $a = O(np) = o(\log n)$.

$$\begin{aligned}
\lambda_a &= n\binom{n-1}{a}p^a(1-p)^{n-1-a} \asymp n\frac{n^a e^a}{\sqrt{a}\;a^a}p^a(1-p)^{n-a} \\
&= \frac{n}{\sqrt{a}}\exp\left[a - a\log(a/(np)) + (n-a)\log(1-p)\right] \\
&= \frac{n}{\sqrt{a}}\exp\left[a - a\log(a/(np)) + (n-a)(-p+O(p^2))\right] \\
&= \frac{n}{\sqrt{a}}\exp\left[a - np - a\log(O(1)) + ap + (n-a)O(p^2))\right] \\
&\geq \frac{n}{\sqrt{a}}\exp\left[-O(a) + O(np^2)\right] = \frac{n}{\sqrt{o(\log n)}}\exp[-o(\log n)] \to \infty.
\end{aligned}$$

   Pour la deuxième partie de la question, on commence par voir que $\lambda_{k+1}/\lambda_k \leq \frac{np}{(k+1)(1-p)} \to 0$, et $\lambda_k/\lambda_{k-1} \leq \frac{np}{k(1-p)} \to 0$. Maintenant, supposons par l'absurde que λ_{k-1} reste borné pour des n dans une sous-suite. Alors λ_k tend vers 0, et donc $\phi(\lambda_k) \to \infty$, ce qui implique qu'à partir d'un certain rang, $\phi(\lambda_k) > \phi(\lambda_{k-1})$, ce qui est absurde. Donc $\lambda_{k-1} \to \infty$. Le même raisonnement implique que $\lambda_{k+1} \to 0$.

2. On procède par premier et second moment. L'espérance du nombre de sommets de degré $\geq k+1$ est

$$\sum_{i=k+1}^{n-1}\lambda_i \leq \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{k+1}\left(\frac{np}{k(1-p)}\right)^i \leq \lambda_{k+1}\frac{1}{1-o(1)} = o(1).$$

Donc avec grande probabilité il n'y en a pas.

On montre par la méthode du second moment qu'avec grande probabilité il y a un sommet de degré $k-1$. Déjà, $\mathbb{E}[X_{k-1}] = \lambda_{k-1} \to \infty$, et après calcul, on montre que

$$\mathbb{E}[X_{k-1}^2] \sim \mathbb{E}[X_{k-1}]^2 \left[\frac{(k-1)^2}{pn^2} + \frac{(n-k)^2}{n^2(1-p)} \right].$$

Si on montre que $(k-1)^2 = o(pn^2)$, on a gagné. Pour ça il suffit se montrer que si $a \geq cn\sqrt{p}$, alors $\lambda_a \to 0$.

$$\begin{aligned}
\lambda_a = n\binom{n-1}{a} p^a (1-p)^{n-1-a} &\leq n \left(\frac{nep}{a}\right)^a \\
&\leq n \left(\frac{e\sqrt{p}}{c}\right)^a \leq n \left(\frac{e\sqrt{p}}{c}\right)^{cn\sqrt{p}}.
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $p \gg 1/n^2$, cette dernière quantité est $\leq n(o(\log n/n))^2$ à partir d'un certain rang, donc tend vers 0.

3. On a que le nombre moyen de sommets de degré k est λ_k, supposé convergeant vers λ. Si $\lambda = 0$, le premier moment donne $\mathbb{P}(\Delta(G) = k) \to 0$ et si $\lambda = \infty$, le second moment comme ci-dessus donne $\mathbb{P}(\Delta(G) = k) \to 1$. Pour $\lambda \in (0, \infty)$, il faudrait un résultat de convergence Poissonienne pour montrer que $\mathbb{P}(\Delta(G) = k-1) \to e^{-\lambda}$.