

examen de processus stochastiques et mouvement brownien (3 heures)

Les notes de cours sont autorisées. Tout résultat de cours ou de TD, rappelé avec précision, peut être utilisé.

Exercice 1. Mouvement brownien et fonction harmonique

Dans cet exercice, on considère $(B_t)_{t \geq 0} = (B_{1,t}, \dots, B_{d,t})_{t \geq 0}$ un mouvement brownien en dimension d , issu de $(q, 0, \dots, 0)$, avec $q > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \dots, d\}$, on note

$$T_i(a) = \inf\{t \geq 0, B_{i,t} = a\}.$$

1. Que vaut $\mathbb{P}(T_1(a) < T_1(0))$ pour $a > q$?
2. Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $i \geq 2$, montrer l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}(T_i(a) < T_1(0)) = \mathbb{P}(|aN'| < q|N|),$$

où N et N' sont deux variables réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. En déduire

$$\mathbb{P}(T_i(a) < T_1(0)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{|a|} \mathbb{E}[|N|].$$

3. Soit H l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ et $S_r := \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = r\}$ la sphère de $\mathbb{R}^d$ centrée en l'origine et de rayon $r > 0$. On note $T_H := \inf\{t \geq 0, B_t \in H\}$ le temps d'atteinte de H , et $T_{S_r} := \inf\{t \geq 0, B_t \in S_r\}$ celui de S_r . Montrer que pour tout $r > q$, on a

$$\mathbb{P}(T_{S_r} < T_H) \leq \frac{q\sqrt{d}}{r} \left(1 + 2(d-1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbb{E}[|N|] \right).$$

4. Soit h une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$\frac{\|h(x)\|}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Montrer que

$$h(q, 0, \dots, 0) = \mathbb{E}[h(T_H)].$$

5. Montrer que h est en fait constante sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2. Temps moyen passé dans une boule de $\mathbb{R}^\delta$

Soit B un mouvement brownien en dimension $\delta \geq 3$, qui, sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}_x$, est issu de $x \in \mathbb{R}^\delta$, de norme euclidienne $\|x\| = q \geq 0$. Pour $r > 0$ et $s > \max(q, r)$, on note $T_s = \inf\{t \geq 0, \|B_t\| = s\}$ et on s'intéresse à la quantité

$$\Phi(q, r, s) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_s} \mathbb{1}_{\|B_t\| \leq r} dt \right].$$

1. Justifier brièvement que $\Phi(q, r, s)$ est bien définie, au sens où l'expression qui la définit ne dépend pas du choix de x de norme q . Montrer que pour $\lambda > 0$, on a $\Phi(\lambda q, \lambda r, \lambda s) = \lambda^2 \Phi(q, r, s)$.
2. Montrer que le processus $(\|B_t\|^2 - \delta t)_{t \geq 0}$ est une martingale, et déduire la valeur de $\mathbb{E}_x[T_s]$ pour $\|x\| = q < s$. (On pourra justifier brièvement pourquoi T_s est fini ps).
3. Jusqu'à la question 5, on s'intéresse au cas $q = r = 1$. Pour $\rho \in]1, s[$, on introduit la suite¹ de temps d'arrêt $(\tau_n^{(\rho)})_{n \geq 0}$ définie récursivement par $\tau_0^{(\rho)} = 0$, puis, pour $n \geq 0$,

$$\tau_{2n+1}^{(\rho)} = \inf\{t \geq \tau_{2n}^{(\rho)}, \|B_t\| = \rho\}, \quad \tau_{2n+2}^{(\rho)} = \inf\{t \geq \tau_{2n+1}^{(\rho)}, \|B_t\| = 1\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que pour $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}_x(\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s) = \left(\frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}} \right)^n.$$

On pourra commencer par montrer, pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_x \left(\tau_{2n+2}^{(\rho)} < T_s \mid \mathcal{F}_{\tau_{2n+1}^{(\rho)}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{sur l'événement } \{\tau_{2n+1}^{(\rho)} > T_s\} \\ \frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}} & \text{sur l'événement } \{\tau_{2n+1}^{(\rho)} < T_s\} \end{cases}$$

4. Déduire la formule suivante :

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{n \geq 0} (\tau_{2n+1}^{(\rho)} - \tau_{2n}^{(\rho)}) \mathbb{1}_{\{\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s\}} \right] = \frac{\rho^2 - 1}{\delta} \frac{1 - s^{2-\delta}}{1 - \rho^{2-\delta}}.$$

5. En faisant tendre ρ vers 1, montrer que l'on a

$$\Phi(1, 1, s) = \frac{2}{\delta(\delta - 2)} (1 - s^{2-\delta}).$$

6. Déterminer $\Phi(q, r, s)$ dans le cas général, c'est-à-dire $q \geq 0$, $r > 0$ et $s > \max(q, r)$.
7. Déduire de la question précédente la limite de $\Phi(0, r, s)$ lorsque s tend vers l'infini, et retrouver ce résultat par un calcul faisant intervenir la fonction de Green.

1. Dans vos copies, vous pouvez noter τ_n au lieu de $\tau_n^{(\rho)}$ pour simplifier les notations.

Exercice 3. Mouvement brownien avec dérive

Le mouvement brownien (réel) avec dérive a est le processus X défini par

$$X_t := B_t + at,$$

où B est un mouvement brownien réel issu de 0.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, la loi de $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ est absolument continue par rapport à la loi de $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$, et déterminer sa dérivée de Radon-Nikodym. On pourra regarder les lois de $(X_{t_i})_{1 \leq i \leq p}$ et $(B_{t_i})_{1 \leq i \leq p}$ pour $p \geq 1$ et $t_1 \leq \dots \leq t_p = t$.
2. La loi de $(X_s)_{s \geq 0}$ est-elle absolument continue par rapport à la loi de $(B_s)_{s \geq 0}$? Justifier.

Exercice 4. Excursions du mouvement brownien

Soit $(B_t)_{t \in [0,1]}$ un mouvement brownien réel issu de 0. On appelle excursion du mouvement brownien la donnée d'un segment d'intérieur non vide $[a, b] \subset [0, 1]$, et de $(B_t)_{t \in [a, b]}$, tel que $B_a = B_b = 0$, et B ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$. Le signe de l'excursion est le signe de B_t pour t quelconque dans $]a, b[$, sa durée est $b - a$

1. Montrer que presque sûrement, les excursions de B sont en nombre infini dénombrable, et de durées distinctes.
2. On ordonne les excursions par ordre décroissant de leur durée. Montrer que la suite des signes des excursions est une suite de variables indépendantes et uniformes sur $\{+, -\}$. (On pourra penser à invoquer le principe d'invariance de Donsker)