Corrigé des deux premiers exercices de l'examen

Exercice 1. Mouvement brownien et fonction harmonique

Dans cet exercice, on considère $(B_t)_{t\geq 0} = (B_{1,t}, \ldots, B_{d,t})_{t\geq 0}$ un mouvement brownien en dimension d, issu de $(q, 0, \ldots, 0)$, avec $q > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, d\}$, on note

$$T_i(a) = \inf\{t \geq 0, B_{i,t} = a\}.$$

1. Que vaut $\mathbb{P}(T_1(a) < T_1(0))$ pour $a > q$?
   $(B_{1,t})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel issu de q, et $T_1(0)$ (resp. $T_1(a)$ est son temps d'atteinte de 0 (resp. a). Un résultat de cours nous donne alors

   $$\mathbb{P}(T_1(a) < T_1(0)) = \frac{q-0}{a-0} = \frac{q}{a}.$$

2. Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $i \geq 2$, montrer l'égalité suivante :

   $$\mathbb{P}(T_i(a) < T_1(0)) = \mathbb{P}(|aN'| < q|N|),$$

   où N et N' sont deux variables réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. En déduire

   $$\mathbb{P}(T_i(a) < T_1(0)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{|a|} \mathbb{E}[|N|].$$

   Les coordonnées de B sont des mouvements browniens réels indépendants, donc $T_1(0)$ et $T_i(a)$ sont indépendants pour $i \geq 2$. Par ailleurs, on a vu en cours que $T_i(a)$, le temps d'atteinte de a pour le mouvement brownien issu de 0, a même loi que a^2/N^2. De même, $T_1(0)$ a même loi que q^2/N^2, donc $(T_i(a), T_1(0))$ a même loi que $(a^2/N^2, q^2/N'^2)$. Ainsi,

   $$\mathbb{P}(T_i(a) < T_1(0)) = \mathbb{P}(\frac{a^2}{N^2} < \frac{q^2}{N'^2}) = \mathbb{P}(|aN'| < q|N|).$$

   Maintenant, en conditionnant par rapport à $|N|$ et en utilisant que la densité de la loi de N' est bornée par $1/\sqrt{2\pi}$, on obtient

   $$\mathbb{P}(|aN'| < q|N| \mid N) = \mathbb{P}\left(-\frac{q|N|}{|a|} < N' < \frac{q|N|}{|a|} \;\Big|\; N\right) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{|a|} |N|.$$

   En prenant l'espérance dans cette inégalité, on obtient le résultat demandé.

3. Soit H l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ et $S_r := \{x \in \mathbb{R}^d, |x| = r\}$ la sphère de $\mathbb{R}^d$ centrée en l'origine et de rayon $r > 0$. On note $T_H := \inf\{t \geq 0, B_t \in H\}$ le temps d'atteinte de H, et $T_{S_r} := \inf\{t \geq 0, B_t \in S_r\}$ celui de S_r. Montrer que pour tout $r > q$, on a

$$\mathbb{P}(T_{S_a} < T_H) \leq \frac{q\sqrt{d}}{r} \left(1 + 2(d-1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathbb{E}[|N|]\right).$$

On peut supposer $r > q\sqrt{d}$, car sinon le membre de droite, supérieur à 1, est une borne supérieure triviale au membre de gauche. Dans ce cas, le point de départ $(q, 0, \dots, 0)$ est inclus dans la boule centrée en 0 de norme infinie $r/\sqrt{d}$, elle-même incluse dans la boule centrée en 0 de norme euclidienne r. Par conséquent, $T_{S_r} \geq \max\left(T_1(-r/\sqrt{d}), T_1(r/\sqrt{d}), \dots, T_d(-r/\sqrt{d}), T_d(r/\sqrt{d})\right)$, et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{S_r} < T_H) \quad \leq \quad & \mathbb{P}(T_1(-r/\sqrt{d}) < T_H) + \mathbb{P}(T_1(r/\sqrt{d}) < T_H) \\ & + \sum_{i=2}^{d} \mathbb{P}(T_i(-r/\sqrt{d}) < T_H) + \sum_{i=1}^{d} \mathbb{P}(T_i(r/\sqrt{d}) < T_H).\end{aligned}$$

Le premier terme est trivialement nul. Le deuxième est borné par $q\sqrt{d}/r$ d'après la question 1, et chaque terme suivant est borné par $\frac{q\sqrt{d}}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathbb{E}[|N|]$ d'après la question 2. On obtient le résultat demandé en sommant toutes ces bornes.

4. Soit h une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$\frac{\|h(x)\|}{\|x\|} \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Montrer que

$$h(q, 0, \dots, 0) = \mathbb{E}[h(T_H)].$$

Soit D_r le domaine $\{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, x_1 > 0, \|x\| < r\}$. Ce domaine satisfait la condition du cône extérieur de Poincaré. On sait qu'on peut alors écrire h, solution du problème de Dirichlet dans ce domaine avec condition au bord h, sous la forme

$$h(x) = \mathbb{E}_x[h\left(B_{T_{\partial D_r}}\right)],$$

où B est un mouvement brownien issu de x sous $\mathbb{P}_x$. En particulier, on a, pour tout $r > q$,

$$h(q, 0, \dots, 0) = \mathbb{E}[h(B_{T_H})\mathbb{1}_{T_H < T_{S_r}}] + \mathbb{E}[h(B_{T_{S_r}})\mathbb{1}_{T_{S_r} \leq T_H}]$$

Le deuxième terme de la somme est borné, en valeur absolue, par

$$\max(\|h(x)\|, |x| = r)\mathbb{P}(T_{S_r} < T_H) \leq c_{q,d}\frac{\max(\|h(x)\|, |x| = r)}{r},$$

où $c_{q,d} < \infty$ ne dépend pas de r (constante donnée par la question précédente). Donc ce terme tend vers 0 lorsque r tend vers l'infini. Ainsi, le premier terme converge nécessairement vers $h(q, 0, \dots, 0)$. Si $h(B_{T_H})$ est une variable intégrable, alors on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer sa convergence vers $\mathbb{E}[h(B_{T_H})]$. Cependant, et contrairement à ce que laisse penser l'énoncé (!), ce résultat n'est pas immédiat. On a $\mathbb{P}(\|B_{T_H}\| \geq r) \leq \mathbb{P}(T_{S_r} < T_H) = O(1/r)$, et en fait on peut aussi montrer que cette queue de distribution est vraiment de l'ordre de $1/r$ (par exemple, si on est en dimension 2, $\|B_{T_H}\|$ est la valeur absolue d'une loi de Cauchy, et en dimension supérieure, elle domine stochastiquement cette même loi de Cauchy). L'hypothèse sur h ne suffit donc pas à prouver que $h(B_{T_H})$ est intégrable. Notons toutefois que l'hypothèse plus forte $\|h(x)\|/\|x\|^{1+\varepsilon}$ bornée en l'infini pour un $\varepsilon > 0$, suffirait. Notons aussi que nous traitons la question suivante dans le cas général.

5. Montrer que h est en fait constante sur $\mathbb{R}^d$.

   On va montrer $h(x) = h(y)$ pour $x = (q, 0, \dots, 0)$ et $y = -x$. Le cas général se traite de la même manière en utilisant l'invariance de la loi du mouvement brownien par les translations et les isométries de $\mathbb{R}^d$. On a, d'après ce qu'on a montré dans la question précédente,

   $$h(x) = \lim_{r \to +\infty} \mathbb{E}_x[h(B_{T_H}) \mathbb{1}_{T_H < T_{S_r}}],$$

   et de même,

   $$h(y) = \lim_{r \to +\infty} \mathbb{E}_y[h(B_{T_H}) \mathbb{1}_{T_H < T_{S_r}}],$$

   Mais par une symétrie simple, les deux membres de droites prennent exactement la même valeur, pour chaque r fixé. Ainsi les limites sont égales et $h(x) = h(y)$.

Exercice 2. Temps moyen passé dans une boule de $\mathbb{R}^\delta$

Soit B un mouvement brownien en dimension $\delta \geq 3$, qui, sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}_x$, est issu de $x \in \mathbb{R}^\delta$, de norme euclidienne $\|x\| = q \geq 0$. Pour $r > 0$ et $s > \max(q, r)$, on s'intéresse à la quantité

$$\Phi(q, r, s) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{T_s} \mathbb{1}_{\|B_t\| \leq r} \mathrm{d}t \right],$$

où l'on a noté $T_s = \inf\{t \geq 0, \|B_t\| = s\}$.

1. Justifier brièvement que $\Phi(q, r, s)$ est bien définie, au sens où l'expression qui la définit ne dépend pas du choix de x de norme q. Montrer que pour $\lambda > 0$, on a $\Phi(\lambda q, \lambda r, \lambda s) = \lambda^2 \Phi(q, r, s)$.

   L'expression définissant $\Phi(q, r, s)$ (ou plutôt sa valeur) ne dépend pas du choix de x car la loi du mouvement brownien est laissée invariante par les isométries de $\mathbb{R}^\delta$. De plus, d'après la propriété d'invariance par changement d'échelle du mouvement brownien, la loi de $(\lambda^{-1} B_{\lambda^2 t})_{t \geq 0}$ sous $\mathbb{P}_{\lambda x}$ est la même que la loi de B sous $\mathbb{P}_x$, d'où

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda q, \lambda r, \lambda s) &= \mathbb{E}_{\lambda x}\left[\int_0^{T_{\lambda s}} \mathbb{1}_{\|B_t\|\leq \lambda r}\mathrm{d}t\right] = \lambda^2 \mathbb{E}_{\lambda x}\left[\int_0^{\lambda^{-2}T_{\lambda s}} \mathbb{1}_{\|\lambda^{-1}B_{\lambda^2 u}\|\leq r}\mathrm{d}u\right] \\ &= \mathbb{E}_{x}\left[\int_0^{T_s} \mathbb{1}_{\|B_t\|\leq r}\mathrm{d}t\right] = \Phi(q,r,s).\end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a utilisé le changement de variable $t = \lambda^2 u$, et pour obtenir la troisième, on a utilisé que $\lambda^{-2}T_{\lambda s}$ est le temps d'atteinte de la sphère de rayon s pour le processus $(\lambda^{-1}B_{\lambda^2 t})_{t\geq 0}$.

2. Montrer que le processus $(\|B_t\|^2 - \delta t)_{t\geq 0}$ est une martingale, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}_x[T_s]$ pour $\|x\| = q < s$. (On pourra justifier brièvement pourquoi T_s est fini ps).

   En notant $B_{k,t}$ la k-ième coordonnée de B_t, on sait que $(B_{k,t})^2 - t$ est une martingale, et en sommant ces δ martingale, on obtient $\|B_t\|^2 - \delta t$, qui est donc une martingale. Dès lors, ce processus stoppé à l'instant T_s étant encore une martingale, on a, pour $\|x\| = q$ et $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x[\|B_{t\wedge T_s}\|^2] = q^2 + \delta \mathbb{E}_x[t \wedge T_s],$$

   en utilisant que q^2 est la valeur initiale de la martingale. Par ailleurs, T_s est fini ps, par exemple par transience du mouvement brownien en dimension δ (même si ce résultat est en fait bien plus élémentaire que cela). Lorsque t tend vers l'infini, le membre de gauche converge vers s^2 par convergence dominée, et le membre de droite vers $q^2 + \delta\mathbb{E}_x[T_s]$ par convergence monotone. On obtient donc

$$\mathbb{E}_x[T_s] = \frac{s^2 - q^2}{\delta}.$$

3. Jusqu'à la question 5, on s'intéresse au cas $q = r = 1$. Pour $\rho \in]1, s[$, on introduit la suite de temps d'arrêt $(\tau_n^{(\rho)})_{n\geq 0}$ définie récursivement par $\tau_0^{(\rho)} = 0$, puis, pour $n \geq 0$,

$$\tau_{2n+1}^{(\rho)} = \inf\{t \geq \tau_{2n}^{(\rho)}, C_t = \rho\}, \qquad \tau_{2n+2}^{(\rho)} = \inf\{t \geq \tau_{2n+1}^{(\rho)}, C_t = 1\},$$

   avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que pour $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}_x(\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s) = \left(\frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}}\right)^n.$$

   On pourra commencer par montrer, pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_{2n+2}^{(\rho)} < T_s \mid \mathcal{F}_{\tau_{2n+1}^{(\rho)}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{sur l'événement } \{\tau_{2n+1}^{(\rho)} > T_s\} \\ \frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}} & \text{sur l'événement } \{\tau_{2n+1}^{(\rho)} < T_s\}\end{cases}$$

Rappelons le résultat du cours

$$\mathbb{P}_x(T_1 < T_s) = \frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}},$$

pour tout x vérifiant $\|x\| = \rho$, où l'on a noté $T_1 = \inf\{t \geq 0, \|B_t\| = 1\}$. Par ailleurs, la propriété de Markov appliquée au temps d'arrêt $\tau_{2n+1}^{(\rho)}$ nous dit que, conditionnellement à $\mathcal{F}_{\tau_{2n+1}^{(\rho)}}$ et sur l'événement $\{\tau_{2n+1}^{(\rho)} < T_s\}$, le processus $\big(B_{t+\tau_{2n+1}^{(\rho)}}\big)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de $B_{\tau_{2n+1}^{(\rho)}}$, d'où comme $\|B_{\tau_{2n+1}^{(\rho)}}\| = \rho$,

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_{2n+2}^{(\rho)} < T_s \;\middle|\; \mathcal{F}_{\tau_{2n+1}^{(\rho)}}\right) = \frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}}.$$

Sur $\{\tau_{2n+1}^{(\rho)} > T_s\}$, cette même probabilité conditionnelle est bien évidemment nulle. Par suite, sur l'événement $\{\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s\}$, on obtient également, en utilisant que l'événement $\{\tau_{2n+1}^{(\rho)} < T_s\}$ est alors presque-sûr,

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_{2n+2}^{(\rho)} < T_s \;\middle|\; \mathcal{F}_{\tau_{2n}^{(\rho)}}\right) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x\left(\tau_{2n+2}^{(\rho)} < T_s \;\middle|\; \mathcal{F}_{\tau_{2n+1}^{(\rho)}}\right) \;\middle|\; \mathcal{F}_{\tau_{2n}^{(\rho)}}\right] = \frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}}.$$

Ainsi $\mathbb{P}_x\left(\tau_{2n+2}^{(\rho)} < T_s \;\middle|\; \tau_{2n}^{(\rho)} < T_s\right) = \frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}}$, et on obtient alors le résultat par récurrence immédiate.

4. Déduire la formule suivante :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n\geq 0}(\tau_{2n+1}^{(\rho)} - \tau_{2n}^{(\rho)})\mathbb{1}_{\{\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s\}}\right] = \frac{\rho^2 - 1}{\delta}\,\frac{1 - s^{2-\delta}}{1 - \rho^{2-\delta}}.$$

De nouveau par la propriété de Markov, sur l'événement $\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s$ et conditionnellement à $\mathcal{F}_{\tau_{2n}^{(\rho)}}$, le processus $(B_{t+\tau_{2n}^{(\rho)}})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de $B_{\tau_{2n}^{(\rho)}}$, avec $\|B_{\tau_{2n}^{(\rho)}}\| = 1$. Ainsi, en utilisant la question 2, sur l'événement $\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s$, on a

$$\mathbb{E}_x\big[(\tau_{2n+1}^{(\rho)} - \tau_{2n}^{(\rho)}) \;\big|\; \mathcal{F}_{\tau_{2n}^{(\rho)}}\big] = \frac{\rho^2 - 1}{\delta}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\sum_{n\geq 0}(\tau_{2n+1}^{(\rho)} - \tau_{2n}^{(\rho)})\mathbb{1}_{\{\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s\}}\right] &= \frac{\rho^2 - 1}{\delta}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_x(\tau_{2n}^{(\rho)} < T_s) \\
&= \frac{\rho^2 - 1}{\delta}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\rho^{2-\delta} - s^{2-\delta}}{1 - s^{2-\delta}}\right)^n \\
&= \frac{\rho^2 - 1}{\delta}\,\frac{1 - s^{2-\delta}}{1 - \rho^{2-\delta}}.
\end{aligned}$$

5. En faisant tendre ρ vers 1, montrer que l'on a

$$\Phi(1,1,s) = \frac{2}{\delta(\delta-2)}(1-s^{2-\delta}).$$

Les équivalences simples $\rho^2-1 \sim 2\rho$ et $1-\rho^{2-\delta} \sim (\delta-2)\rho$ lorsque ρ tend vers 1, montrent que l'expression précédente converge vers $\frac{2}{\delta(\delta-2)}(1-s^{2-\delta})$ lorsque ρ tend vers 1. Il reste à voir que le terme de gauche tend vers $\Phi(1,1,s)$. Pour cela, observons que sur l'événement presque-sûr $\{T_s < +\infty\}$, la somme à l'intérieur de l'espérance, tend vers $\int_0^{T_s} \mathbb{1}_{\|B_t\|\leq 1}\mathrm{d}t$ lorsque q tend vers 1. De plus, cette somme étant bornée par T_s d'espérance finie, on conclut en appliquant le théorème de convergence dominée.

6. Déterminer $\Phi(q,r,s)$ dans le cas général, c'est-à-dire $q \geq 0$, $r > 0$ et $s > \max(q,r)$.

   En utilisant les questions 1 et 5, on a, pour $s > r > 0$,

$$\Phi(r,r,s) = \frac{2r^2}{\delta(\delta-2)}\left(1-\left(\frac{s}{r}\right)^{2-\delta}\right).$$

   Dans le cas $q < r$, on a, par la propriété de Markov et la question 2,

$$\Phi(q,r,s) = \mathbb{E}_x[T_r] + \Phi(r,r,s) = \frac{r^2-q^2}{\delta} + \frac{2r^2}{\delta(\delta-2)}\left(1-\left(\frac{s}{r}\right)^{2-\delta}\right).$$

   Dans le cas $q > r$, on a, par la propriété de Markov,

$$\Phi(q,r,s) = \mathbb{P}_x(T_r < T_s)\Phi(r,r,s) = \frac{2r^2}{\delta(\delta-2)}\left(\left(\frac{q}{r}\right)^{2-\delta} - \left(\frac{s}{r}\right)^{2-\delta}\right).$$

7. Déduire de la question précédente la limite de $\Phi(0,r,s)$ lorsque s tend vers l'infini, et retrouver ce résultat par un calcul faisant intervenir la fonction de Green.

On a $\Phi(0,r,s) \to \frac{r^2}{\delta} + \frac{2r^2}{\delta(\delta-2)} = \frac{r^2}{\delta-2}$. Par ailleurs, par théorème de convergence monotone, on a également

$$\Phi(0,r,s) \to \mathbb{E}_0\left[\int \mathbb{1}_{\|B_t\|\leq r}\mathrm{d}t\right] = \int_{B(0,r)} G(0,x)\mathrm{d}x,$$

où $G(0,x)$ est la fonction de Green du mouvement brownien transient B. On rappelle que $G(0,x)$ est donné explicitement par

$$G(0,x) = \frac{\Gamma(\frac{\delta}{2}-1)}{2\pi^{\delta/2}}\|x\|^{2-\delta}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} G(0,x)\mathrm{d}x &= \frac{\Gamma(\frac{\delta}{2}-1)}{2\pi^{\delta/2}}\int_{B(0,r)}\|x\|^{2-\delta}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\frac{\delta}{2}-1)}{2\pi^{\delta/2}}\sigma_\delta(S^{\delta-1})\int_0^r u\mathrm{d}u \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\delta}{2}-1)}{\Gamma(\frac{\delta}{2})}\frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{\delta-2},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé un changement de coordonnées polaires, et noté $\sigma_\delta(S^{\delta-1})$ la mesure de la sphère unité. On retrouve bien le résultat par l'utilisation de la fonction de Green.