Corrigé du partiel de processus stochastiques

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Les premières questions de chaque exercice sont facultatives : il est conseillé de n'y répondre que si on répond également à toutes les autres, ou au contraire si l'on est bloqué sur les autres questions.

Exercise 1 : Points de croissance du mouvement brownien

On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ possède un point de croissance en $t > 0$ si t est un "maximum local à gauche et un minimum local à droite", autrement dit, si il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tous les s dans $[t-\varepsilon, t]$, on ait $f(s) \leq f(t)$, et pour tous les s dans $[t, t+\varepsilon]$, on ait $f(s) \geq f(t)$. Le but de cet exercice est de prouver que presque sûrement, la trajectoire d'un mouvement brownien ne possède pas de point de croissance.

On note A l'ensemble des fonctions continues qui possèdent (au moins) un point de croissance, et $\tilde{A} \subset A$ l'ensemble des fonctions continues f qui vérifient la propriété suivante :

$$\exists t > 0, \exists u > t, f(t) \leq 1, f(u) \geq f(t) + 2, \forall s \in [0,t], \forall s' \in [t,u], f(s) \leq f(t) \leq f(s').$$

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0. Pour $s \geq 0$, on note $B^{(s)} = (B_t^{(s)})_{t\geq 0}$ le processus défini par $B_t^{(s)} = B_{s+t} - B_s$.

1. *Question facultative :* Montrer que presque-sûrement, la fonction B n'est constante sur aucun intervalle d'intérieur non vide.
2. Déduire le résultat suivant :

$$\mathbb{P}\left(\{B \in A\} \setminus \bigcup_{q,r \in \mathbb{Q}_+^*} \left\{ \left(\frac{1}{r} B^{(q)}_{\sqrt{r}t}\right)_{t\geq 0} \in \tilde{A} \right\}\right) = 0.$$

Notons D l'ensemble des fonctions continues qui ne sont constantes sur aucun intervalle d'intérieur non vide. D'après la question 1, on a $P(B \notin D) = 0$. Il suffit alors de montrer que l'événement considéré dans cette question est inclus dans l'événement $\{B \notin D\}$. Il s'agit là d'un résultat déterministe. En effet, si B appartient à $A \cap D$, alors :

- *Soit t un point de croissance de B, et $\varepsilon > 0$ tel que $B_t \leq B_s$ pour tout $s \in [t, t+\varepsilon]$ et $B_t \geq B_s$ pour tout $s \in [t-\varepsilon, t]$. Comme B n'est pas constante sur $[t, t+\varepsilon]$, on peut trouver $u \in]t, t+\varepsilon]$ tel que $B_u > B_t$.*
- *Soit $r \in \mathbb{Q}_+^* \cap]0, (B_u - B_t)/2[$. Par continuité de B, il existe $\delta > 0$ tel que $|s-t| \leq \delta \Rightarrow |B_s - B_t| \leq r$. On se donne alors $q \in]t-\delta, t[\cap]t-\varepsilon, t[\cap \mathbb{Q}$.*

Les rationnels q et r que l'on a introduits, avec les réels t et u, vérifient alors la propriété suivante :

$$B_t - B_q \leq r, B_u - B_t \geq r, \forall v \in [q,t], \forall v' \in [t,u], B_v \leq B_t \leq B_{v'},$$

ce qui implique que la fonction $\left(\frac{1}{r}B_t^{(q)}\right)_{t\geq 0}$ est dans $\tilde{A}$. Il en est alors de même pour la fonction $\left(\frac{1}{r}B_{\sqrt{r}t}^{(q)}\right)_{t\geq 0}$, ce qui permet de conclure cette question, mais aussi de la fonction $\left(\frac{1}{r}B_{r^2t}^{(q)}\right)_{t\geq 0}$, ce que l'on va utiliser dans la question suivante[1].

3. Montrer qu'il suffit de prouver $\mathbb{P}(B \in \tilde{A}) = 0$ pour en déduire $\mathbb{P}(B \in A) = 0$.

   Par propriété de Markov simple du mouvement brownien et invariance par changement d'échelle, on sait que les processus $\left(\frac{1}{r}B_{r^2t}^{(q)}\right)_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens. Si $\mathbb{P}(B \in \tilde{A}) = 0$, alors on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{q,r\in\mathbb{Q}_+^*} \left\{\left(\frac{1}{r}B_{r^2t}^{(q)}\right)_{t\geq 0} \in \tilde{A}\right\}\right) = 0,$$

   puis $\mathbb{P}(B \in A) = 0$ avec la question précédente.

On va maintenant prouver $\mathbb{P}(B \in \tilde{A}) = 0$. Pour cela, on se fixe $\varepsilon \in]0,1[$, et on définit par récurrence $M_0 = 0$, $U_0 = 0$, puis, pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} T_k &:= \inf\{t > U_k, B_t - M_k \in \{-\varepsilon, 2\}\}, \\ M_{k+1} &:= \max_{t\in[0,T_k]} B_t, \\ U_{k+1} &:= \inf\{t > T_k, B_t = M_{k+1}\}. \end{aligned}$$

On définit également $X_k = M_k - M_{k-1}$, pour $k \geq 1$, et on introduit

$$E_\varepsilon := \{\exists k \geq 0, M_k \leq 1, X_{k+1} = 2\}.$$

4. Montrer que la suite (X_k) est iid. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 \geq x)$ pour x dans $]0,2]$, et en déduire l'espérance de X_1.

   Notons C l'espace de Wiener des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et $\hat{T} : C \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et $\varphi : C \to \mathbb{R}$ les fonctionnelles définies par

$$\begin{aligned} \hat{T}(f) &= \inf\{t > 0, f(t) \in \{-\varepsilon, 2\}\}, \\ \varphi(f) &= \sup_{t\in[0,\hat{T}(f)[} f(t), \end{aligned}$$

[1] En fait, il s'agissait ici d'une erreur d'énoncé, la question 2 aurait du porter sur les processus $\left(\frac{1}{r}B_{r^2t}^{(q)}\right)_{t\geq 0}$

de sorte que $T_1 = \hat{T}(B)$ et $X_1 = M_1 = \varphi(B)$. Pour $k \geq 1$, observons que T_k et U_k sont des temps d'arrêt finis presque sûrement car le mouvement brownien réel est récurrent. De plus, $(X_1, \dots, X_k)$ est $\mathcal{F}_{U_k}$ mesurable car on peut l'écrire comme une fonction mesurable de $(B_{t\wedge U_k})_{t\geq 0}$. Enfin, la construction par récurrence nous donne

$$\begin{aligned} T_k - U_k &= \inf\{t > 0, B_t^{(U_k)} \in \{-\varepsilon, 2\}\} = \hat{T}(B^{(U_k)}), \\ X_{k+1} &= \max_{t\in[0,T_k-U_k]} B_t^{(U_k)} = \varphi(B^{(U_k)}). \end{aligned}$$

D'après le propriété de Markov forte du mouvement brownien, le processus $B^{(U_k)}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{U_k}$, et on en déduit que X_{k+1} est indépendant de $(X_1, \dots X_k)$ et de même loi que X_1. La suite (X_k) est donc iid.
Soit maintenant $x \in]0, 2]$. En notant $\tilde{T}_x = \inf\{t \geq 0, B_t = x\}$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 \geq x) = \mathbb{P}(\tilde{T}_x \leq \tilde{T}_{-\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{x + \varepsilon},$$

où la deuxième égalité est un résultat classique sur le brownien. Comme X_1 est à valeurs dans $[0, 2]$, on en déduit

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_0^2 \mathbb{P}(X_1 \geq x)dx = \varepsilon(\log(2 + \varepsilon) - \log \varepsilon).$$

5. Montrer que l'on a
$$\mathbb{P}(E_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(M_k \leq 1).$$

Remarquons que les événements $\{M_k \leq 1, X_{k+1} = 2\}$ sont disjoints, car si $X_{k+1} = 2$, alors $M_{k+1} > 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_\varepsilon) &= \sum_k \mathbb{P}(M_k \leq 1, X_{k+1} = 2) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(M_k \leq 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \sum_k \mathbb{P}(M_k \leq 1), \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a utilisé que M_k est $\mathcal{F}_{T_k}$-mesurable, et donc indépendant de X_{k+1}. La dernière égalité découle de la question précédente.

6. On note $N := \inf\{k \geq 1, M_k > 1\}$. Montrer que N est fini presque sûrement et que l'on a
$$\mathbb{E}[M_N] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(M_k \leq 1).$$

Le fait que N est fini découle encore de la récurrence du mouvement brownien. Maintenant, remarquons que l'on a

$$M_N = \sum_k \mathbb{1}_{\{M_k \le 1\}}(M_{k+1} - M_k) = \sum_k \mathbb{1}_{\{M_k \le 1\}} X_{k+1}.$$

En prenant l'espérance et par les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient

$$\mathbb{E}[M_N] = \sum_k \mathbb{P}(M_k \le 1)\mathbb{E}[X_{k+1}] = \mathbb{E}[X_1] \sum_k \mathbb{P}(M_k \le 1).$$

7. En déduire $\mathbb{P}(E_\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$, puis conclure.

D'après les trois questions précédentes, et en utilisant que M_N est trivialement borné par 3, on a

$$\mathbb{P}(E_\varepsilon) = \frac{\varepsilon\, \mathbb{E}[M_n]}{(2+\varepsilon)\, \mathbb{E}[X_1]} \le \frac{3}{(2+\varepsilon)(\log(2+\varepsilon) - \log \varepsilon)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Pour conclure $\mathbb{P}(B \in A) = 0$, il suffit alors d'observer que l'événement $\{B \in A\}$ est inclus dans E_ε pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'agit là encore d'un résultat déterministe. Fixons $\varepsilon > 0$, et pour $B \in A$, choisissons $t > 0$ et $u > t$ tels que

$$B_t \le 1, B_u \ge B_t + 2, \forall s \in [0,t], \forall s' \in [t,u], B_s \le B_t \le B_{s'}.$$

Soit $k = \inf\{j \ge 0 : T_{j+1} > t\}$. Alors k est fini et $T_k \le t$ donc $M_k \le B_t \le 1$. De plus, comme $T_{k+1} > t$, on a $B_t - M_k \in]-\varepsilon, 0]$ et

$$T_{k+1} = \inf\{v > t, B_v - M_k \in \{-\varepsilon, 2\}\}.$$

Comme $M_k \le B_t$, on a

$$\inf\{v > t, B_v - M_k = 2\} \le \inf\{v > t, B_v - B_t = 2\} \le u,$$

et

$$\inf\{v > t, B_v - M_k = -\varepsilon\} \ge \inf\{v > t, B_v - B_t = -\varepsilon\} > u,$$

d'où l'on déduit $X_{k+1} = 2$. Ainsi l'événement E_ε est satisfait.

Exercise 2 : —*Théorème de Liouville dans $\mathbb{R}^d$*

Le but de cet exercice est de montrer de manière probabiliste le théorème de Liouville dans $\mathbb{R}^d$, qui affirme que toute fonction harmonique et bornée est constante. Soit donc $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ harmonique et bornée. On rappelle que cela signifie que f est C^2 et vérifie

$$\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

On suppose que sous $\mathbb{P}_x$, où x est dans $\mathbb{R}^d$, le processus B est un mouvement Brownien en dimension d issu de x. Pour $t > 0$ et x et y réels, on note $p(t; x, y)$ la densité de la gaussienne centrée en x et de variance t, soit

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right).$$

Pour $t > 0$ et x et y dans $\mathbb{R}^d$, on note $p_d(t; x, y)$ la densité du vecteur gaussien centré en x et de matrice de covariance $t\,\mathrm{Id}$, soit

$$p_d(t; x, y) = \prod_{i=1}^{d} p(t; x_i, y_i).$$

1. *Question facultative :* Vérifier que l'on a

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t; x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(t; x, y),$$

   et en déduire

$$\frac{\partial p_d}{\partial t}(t; x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 p_d}{\partial y_i^2}(t; x, y) \underset{\text{not.}}{=} \frac{1}{2}\Delta_y p_d(t; x, y).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note φ_x la fonction définie par

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_x(t) = \mathbb{E}_x[f(B_t)].$$

   Montrer que φ_x est continue en 0, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée nulle.
   Comme f est une fonction bornée, la continuité de φ_x en 0 découle de la continuité de B en 0, et du théorème de convergence dominée. De plus, pour $t > 0$, on a

$$\varphi_x(t) = \mathbb{E}_x[f(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_d(t; x, y) dy.$$

   Le théorème de dérivée sous le signe intégral, licite car f est bornée, et que $\frac{\partial p_d}{\partial t}$ est continu et localement dominé par une fonction intégrable, nous donne, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_x'(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial p_d}{\partial t}(t; x, y) dy. \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \Delta_y p_d(t; x, y) dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta f(y) p_d(t; x, y) dy = 0, \end{aligned}$$

   à l'aide d'intégrations pas parties justifiées par le fait que f est bornée et p_d et ses dérivées partielles (premières et secondes) tendent vers 0 en l'infini. Par conséquent, la fonction φ_x est constante, et l'on a $\varphi_x(t) = \varphi_x(0) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$.

3. On travaille sous $\mathbb{P}_x$, avec $x \in \mathbb{R}^d$ fixé. Montrer que le processus $M_t = f(B_t)$ est une martingale.

   Pour $s, t \geq 0$, on sait que M_{t+s} est borné donc dans L^1. Par ailleurs, en utilisant que conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, le processus $(B_{t+u})_{u \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de B_t, on en déduit

$$\mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t] = \varphi_{B_t}(s) = f(B_t) = M_t.$$

   Ainsi M_t est bien une martingale.

4. En déduire que M_t converge presque sûrement. On notera M_∞ sa limite p.s.

   Comme toute martingale à trajectoires continues et bornées, la martingale M_t converge presque sûrement.

5. En utilisant que M_∞ est mesurable par rapport à la tribu asymptotique $\cap_{t>0}\sigma(B_u, u \geq t)$, montrer que M_∞ est constante presque sûrement.

   La limite M_∞ est clairement mesurable par rapport à la tribu asymptotique. Il suffit alors de montrer que cette tribu est grossière. C'est la loi du 0-1 pour les événements de queue, qui découle de la loi du 0-1 de Blumenthal et du fait qu'on peut écrire la tribu asymptotique comme la tribu germe du mouvement brownien obtenu par inversion du temps, à savoir $\big(t(B_{1/t} - x)\big)_{t \geq 0}$.

6. Montrer que la valeur de cette constante ne dépend pas de x, et en déduire le théorème de Liouville.

   Pour $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque, notons $g(x)$ la limite p.s. de $f(B_t)$ sous $\mathbb{P}_x$. Comme M est, sous $\mathbb{P}_x$, une martingale continue bornée, elle est fermée par M_∞, et l'on a en particulier

$$g(x) = \mathbb{E}_x[M_\infty] = \mathbb{E}_x[M_0] = f(x).$$

   Ainsi les fonctions f et g coïncident, et il suffit donc bien de prouver que g est constante pour en déduire le théorème de Liouville. On garde toutefois la notation g dans la suite, pour la clarté de l'argument. On travaille de nouveau sous $\mathbb{P}_x$, pour $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque. En conditionnant au temps 1, on obtient :

$$g(x) = \mathbb{E}_x[M_\infty|\mathcal{F}_1] = g(B_1),$$

   où la première égalité découle de l'égalité $M_\infty = g(x)$ presque sûrement, et la deuxième de la propriété de Markov appliquée au temps 1. Comme la loi de B_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on en déduit que g est égale à $g(x)$ presque partout (noter que l'égalité ci-dessus n'a de sens que p.s. puisqu'elle fait intervenir une espérance conditionnelle). Pour obtenir $g(y) = g(x)$ pour tout y, on peut utiliser le fait que g, qui coïncide avec f, est continue. Sinon, on peut également écrire, pour y quelconque,

$$g(y) = \mathbb{E}_y[\mathbb{E}_y[M_\infty|\mathcal{F}_1]] = \mathbb{E}_y[g(B_1)] = g(x),$$

   où la dernière égalité découle du fait que la fonction g prend la valeur $g(x)$ presque partout.

   Finalement, le théorème de Liouville est démontré.