**DM 2**

À retourner le mercredi 24 avril au TD si vous voulez votre copie corrigée le vendredi, et **vendredi 26 au TD dernier délai** sinon. Bon courage !

# 1 Motivation

*Une énigme à laquelle ce DM pourrait vous aider à répondre.* Dans un univers parallèle, l'ENS de Lyon est peuplée d'une équipe enseignante maléfique qui n'hésite pas à employer les moyens les plus sournois pour faire échouer ses étudiants. Le plus féroce de tous, le diabolique Professeur K., propose de rendre les copies de DM d'une manière innovante : les $n$ étudiants seront convoqués en amphi A, en bas duquel des enveloppes de 1 à $n$ seront disposées sur une table. Il y a une copie par enveloppe, dans un ordre inconnu. Les étudiants sont appelés tour à tour sur l'estrade, où ils pourront ouvrir chacun $n/2$ enveloppes et regarder secrètement leur contenu. Si un seul ne parvient pas à consulter sa copie, le DM est annulé et c'est 0 pour tout le monde. Bien entendu toute communication est interdite pendant l'épreuve. Trouver une stratégie qui permette aux étudiants de s'en sortir avec une probabilité supérieure à 30%.

# 2 Étude d'une fonction

Soit $\rho$ l'unique fonction réelle continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ telle que

$$\begin{cases} \rho(x) = 1, & x \in [0,1] \\ x\rho'(x) = -\rho(x-1) & x \in ]1, \infty[. \end{cases}$$

On admet que $\rho$ est bien définie de manière unique par cette équation (on peut le montrer par récurrence sur les intervalles de la forme $[n; n+1]$). On étend $\rho$ à $\mathbb{R}$ en posant $\rho \equiv 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Par intégration par parties, on obtient que pour tout $x \geq 0$, $\int_{x-1}^{x} \rho(t)\,\mathrm{d}t = x\rho(x)$, ce qui permet de montrer par récurrence que pour tout $x \geq 0$, $0 < \rho(x) \leq \frac{1}{\lfloor x \rfloor !}$.

1. Justifier le fait que $\rho, \rho' \in L^1$, puis que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \rho(x)/(\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\,\mathrm{d}t)$ définit une densité de probabilité. Soit $Z$ une variable aléatoire de densité $f$. On a alors que pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(x - 1 \leq Z \leq x\big) = xf(x).$$

2. Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction $L^1$, on notera pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{g}(t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx} g(x)\,\mathrm{d}x$ sa transformée de Fourier non normalisée.
   (a) Remarquer que $\rho$ n'est pas $C^1$ sur $\mathbb{R}$, puis montrer à la main que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\rho'}(t) = it\widehat{\rho}(t) - 1.$$

   (b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par $\widehat{\rho}$.
   (c) En déduire que la fonction caractéristique de $Z$ vaut $\phi_Z(t) = \exp\left(\int_0^1 \frac{e^{itx}-1}{t} dt\right)$.

*Tournez SVP*

## 3 Plus grand cycle d'une permutation

*Remarque : cette partie n'utilise pas la construction des permutations par le processus des restaurants chinois. On en reparle toutefois dans une question bonus.*

Soit $n \geq 1$ et $\sigma_n$ une permutation choisie uniformément au hasard dans $\mathfrak{S}_n$. Pour $1 \leq j \leq n$, on pose $C_j(n)$ le nombre de cycles de longueur $j$ dans $\sigma_n$. On note $\mathbf{C}(n) := (C_1(n), \dots, C_n(n)) \in \mathbb{N}^n$, et $G_n$ la taille maximale d'un cycle de $\sigma_n$.

On peut montrer par simple comptage, et on admet, que pour $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^n$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{C}(n) = \mathbf{c}) = \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^n ic_j = n\}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{c_j} \times (c_j!)} \tag{1}$$

Soit maintenant $X_1, X_2 \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $j \geq 1$, $X_j \sim \text{Poisson}(1/j)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$\mathbf{X}(n) := (X_1, \dots X_n) \quad \text{et} \quad T_n := \sum_{j=1}^n jX_j.$$

3. Montrer que conditionnellement à $\{T_n = n\}$, $\mathbf{X}(n)$ a la même loi que $\mathbf{C}(n)$, c'est-à-dire que

$$\forall \mathbf{c} \in \mathbb{N}^n, \mathbb{P}\big(\mathbf{X}(n) = \mathbf{c} \mid T_n = n\big) := \frac{\mathbb{P}\big(\mathbf{X}(n) = \mathbf{c},\ T_n = n\big)}{\mathbb{P}(T_n = n)} = \mathbb{P}(\mathbf{C}(n) = \mathbf{c}).$$

   Remarque : pas besoin de calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$ pour traiter cette question.

4. Montrer que $T_n/n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, où la loi de $Z$ est définie en question 1.

5. Le but de cette question est d'obtenir le comportement asymptotique de la quantité $\mathbb{P}(T_k = n)$ lorsque $k$ et $n$ tendent vers l'infini à la même vitesse. On appelle cela un théorème local limite, par opposition au théorème limite "global" donné par la question précédente.

   (a) (*question un peu plus difficile que les autres*) Soit $j \geq 1$ et $x_j \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(X_j + 1 = x_j) = jx_j\mathbb{P}(X_j = x_j)$. En déduire que si $U_n$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots n\}$, indépendante de $T_n$, alors

   $$\mathbb{P}(T_n + U_n = k) = \frac{k}{n}\mathbb{P}(T_n = k).$$

   (b) Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

   $$\mathbb{P}(T_n = k) = \frac{1}{k}\mathbb{P}(k - n \leq T_n < k).$$

   (c) Soit $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers telle que $k_n/n \to y \in ]0, \infty[$. Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(T_n = k_n)$ lorsque $n \to \infty$. (on pourra admettre que lors d'une convergence en loi vers une loi continue, la convergence des fonctions de répartition est uniforme, par le second théorème de Dini).

6. (a) Soit $0 \leq m \leq n$. Montrer que

   $$\mathbb{P}(G_n \leq m) = \mathbb{P}(X_{m+1} = 0) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = 0)\frac{\mathbb{P}(T_m = n)}{\mathbb{P}(T_n = n)}.$$

   (b) Établir la convergence en loi de $G_n/n$ et donner la fonction de répartition de sa limite.

*Fin du DM, questions bonus sur la prochaine page*

# 4 Questions bonus

7. Répondre à l'énigme. (On pourra supposer $n$ assez grand)
8. Justifier l'équation (1)
9. Remarquer que pour $k \geq n/2$, la probabilité d'avoir un cycle de taille supérieure à $k$ s'exprime facilement. Ainsi on peut trouver facilement la fonction de répartition limite de $G_n/n$ sur $[1/2, 1]$ sans toute cette machinerie, et également répondre à l'énigme pour $n$ quelconque.
10. Par la question 3, on peut trouver la valeur de $\mathbb{P}(T_n = n)$. En appliquant le résultat de la question 5c, en déduire la valeur de $\int \rho$. Plutôt sympa non ?
11. Le processus des restaurants chinois, vu en cours, permet d'étudier la taille du cycle contenant l'entier 1 dans $\sigma_n$. Elle suit un processus que nous avons étudié en TD. Lequel ? Quelle limite en loi obtient on ?
12. Soit $U_1, U_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0; 1]$. Montrer que $U_1 + U_1 U_2 + U_1 U_2 U_3 + \cdots$ a la même loi que $Z$.
13. Faire quelques simulations (de la fonction $\rho$, de la fonction de répartition limite de $G_n/n$, de tailles de cycles dans une grande permutation...)
14. Conjecturer un résultat de théorie des nombres analogue à celui obtenu ici. Le plus incroyable, c'est qu'il est vrai (sous réserve que vous ayez conjecturé le bon...)