ENS de Lyon $\qquad$ 2$^{\text{nd}}$ semestre 2018-2019

L3 - Intégration et Probabilités

TD 1

Espaces de probabilité, probabilités discrètes.

Espaces de probabilité

Exercice 1 *Construction d'espaces de probabilité*

1. Soit
$$\Omega := \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}.$$
On pose pour tout $A \in \mathcal{F}$,
$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 \text{ si } A^c \text{ est dénombrable.} \end{cases}$$
Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.
2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}) := ([0;1], \mathcal{B}([0;1]))$. Soit $\mathbb{Q}$ définie sur $\mathcal{F}$ par
$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{Q}(A) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon] \subset A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Est-ce que $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité ?

Exercice 2 *Ensemble à densité asymptotique*

Un ensemble $A \in \mathbb{N}^*$ est dit de densité asymptotique $\theta > 0$ si et seulement si,
$$\lim_{n\to\infty} |A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|/n = \theta,$$
pour peu que cette limite existe bien.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité asymptotique. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

Exercice 3 *Espace de probabilité non-atomique*

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit non-atomique si et seulement si
$$\forall A \in \mathcal{F}, \ \exists B \in \mathcal{F} \text{ tel que } B \subset A \text{ and } 0 < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A).$$

1. Montrer que $([0;1], \mathcal{B}([0;1]), \lambda)$ est non-atomique.

On fixe désormais $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité non-atomique.

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset A$ et $0 < \mathbb{P}(B) < \varepsilon$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ et pour tout $x \in [0; \mathbb{P}(A)]$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset A$ et $\mathbb{P}(B) = x$.
4. En déduire que pour toute suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$, il existe $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que
$$\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1} B_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \ \mathbb{P}(B_n) = p_n.$$

Exercice 4 *Lemme de Borel-Cantelli*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ telle que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$$

On rappelle que l'on note $\limsup_n A_n$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}$.

1. Soit $B_n := \bigcup_{k\geq n} A_k$. Montrer que $\mathbb{P}(B_n) \to 0$.
2. En déduire que
$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0.$$

Probabilités discrètes

Exercice 5 *Le problème des chapeaux*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer la formule de Poincaré (ou "d'inclusion-exclusion") :
$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1 \leq \ldots \leq j_k = n} \mathbb{P}(1_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$
2. On considère un groupe de n personnes, chacun possédant un chapeau. On met tous les chapeaux dans un vestiaire sombre, si bien que les personnes en partant viennent l'une après l'autre prendre au hasard un chapeau (la i-ième personne prend l'un des $n - i + 1$ chapeaux présents avec la même probabilité).
   (a) Modéliser ce problème en termes probabilistes. Quelle est dans ce cadre la probabilité pour qu'une personne au moins retrouve son chapeau ? Calculer la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$.
   (b) Reformuler ce problème en termes de groupe symétrique et retrouver le résultat précédent.

Exercice 6 *Permutations dans un wagon*

Dans une voiture de chemin de fer, les places sont numérotées de 1 à n.

1. Le premier passager ne connait pas son numéro de place (*pour simplifier, on pourra supposer qu'il est censé s'asseoir à la place numéro 1*). Il choisit alors une place uniformément au hasard parmi les n places disponibles.
2. Supposons que k passagers soient déjà installés (pour $k \in [\![1; n-1]\!]$). Le $k+1^{\text{e}}$, qui connaît son numéro de place, arrive (*pour simplifier, on pourra supposer qu'il est à la place numéro* $k+1$). Si sa place est libre, il s'y assied. Sinon, il choisit une place uniformément au hasard parmi les $n - k$ places restantes.

Modéliser en termes probabilistes le problème ci-dessus. Quelle est la probabilité que le dernier passager (le n^{e}) s'asseye à sa place ?