

TD 10

Vecteurs gaussiens, marches aléatoires.

Exercice 1 *Vecteurs gaussiens*

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. On dit que c'est un vecteur Gaussien si pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire $\langle t, X\rangle \in \mathbb{R}$ a une loi normale.

1. Rappeler la fonction caractéristique et la densité (quand elle existe) d'une gaussienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $t \mapsto \mathbb{E}[\langle t, X\rangle]$ est une forme linéaire, et $(s,t) \mapsto \mathrm{Cov}[\langle s, X\rangle, \langle t, X\rangle]$ est une forme bilineaire positive. Elles admettent une représentation $\langle \cdot, m\rangle$ and $\langle \cdot, \Sigma \cdot\rangle$. Quelles sont les coordonnées de ce vecteur et de cette matrice ? Comment les appeler ?
3. Calculer la fonction caractéristique multidimensionnelle de X, et déduire que la loi de X est déterminée par m and Σ. Réciproquement montrer que si on a une fonction caractéristique de cette forme, on est un vecteur gaussien.
4. Montrer qu'une transformée affine $AX+b$ d'un vecteur gaussien X est un vecteur gaussien, et calculer ses paramètres.
5. Montrer que si (X, Y) est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^2$, alors X et Y sont indépendants si et seulement si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Montrer que ça n'est plus une équivalence en enlevant l'hypothèse vecteur gaussien.
6. Montrer que $(X_1, \dots X_n)$ avec $X_1, \dots, X_n$ des gaussiennes centrées réduites iid, est gaussien. Déduire qu'il existe des vecteurs gaussiens de paramètres $m \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$ arbitraires. Calculer la densité d'un vecteur gaussien quand il en a une.
7. Donner une extension multidimensionnelle du théorème central limite.

Exercice 2 *Maximum d'une marche aléatoire simple*

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}$, et $M_n = \max_{i=0}^n S_n$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ fixé. On pose
$$I = \inf\{i \geq 0, S_i = a\}, \qquad \widetilde{X_i} = \begin{cases} X_i, & i \leq I \\ -X_i, & i > I \end{cases}, i \geq 1, \qquad \widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \widetilde{X_i}, n \geq 0.$$
Montrer que $(\widetilde{X_1}, \dots \widetilde{X_n})$ a la même loi que $(X_1, \dots X_n)$ (indication : montrer que $(\widetilde{X_1}, \dots \widetilde{X_n})$ est obtenu de $(X_1, \dots X_n)$ par l'application d'une bijection de $\{-1, +1\}^n$). En déduire la même chose pour S et $\widetilde{S}$
2. Calculer $\mathbb{P}(M_n \geq a)$. En déduire la loi de M_n.

Exercice 3 *Marches aléatoires réfléchies.*

1. Soit $p \in (0, 1)$, et μ la loi sur $\{-1, 1\}$ telle que $\mu(\{1\}) = p$ et $\mu(\{-1\}) = 1 - p$. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi μ. On définit les processus $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(T_n)_{n\geq 0}$ par récurrence par $S_0 = T_0 = 0$ et
$$\forall n \geq 0, \quad S_{n+1} = S_n + X_{n+1}, \qquad T_{n+1} = \Big|T_n + X_{n+1}\Big|.$$
Ces processus sont appelés respectivement marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de loi de saut μ, et marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ de loi de saut μ.

(a) Déterminer selon la valeur de p la récurrence ou la transience de chacune des deux marches aléatoires.

(b) Montrer que dans le cas transient, p.s. $(T_n - S_n)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang. En déduire la convergence p.s. de $(T_n/n)_{n\geq 0}$.

2. Soit $\mathbb{T}_2$ l'arbre binaire infini. Tous ses sommets ont trois voisins (dont un peut être vu comme son parent), sauf un sommet particulier, le sommet racine, qui en a deux. On considère $(Y_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{T}_2$.

Formellement, on peut représenter $\mathbb{T}_2$ comme étant $\bigcup_{n\geq 0}\{0,1\}^n$ l'ensemble des suites finies constituées de 0 et de 1 (avec $\{0,1\}^0 := \{\emptyset\}$ la suite vide), l'ensemble $\{0;1\}^n$ constituant les sommets de la génération n. Ainsi l'élément $(0,1,1)$ par exemple pourra être vu comme le fils droit du fils droit du fils gauche de la racine.

On construit alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{T}_2$ comme suit. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$, ainsi qu'une suite auxiliaire $(X'_k)_{k\geq 1}$ de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{0,1\}$. On construit $(Y_n)_{n\geq 0}$ par récurrence :

- On pose $Y_0 = \emptyset$.
- Soit $n \geq 0$, supposons Y_n construit. On pose

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n.X_{n+1} & \text{si } X_{n+1} \in \{0,1\} \\ \overleftarrow{Y_n} & \text{si } X_{n+1} = -1 \text{ et } Y_n \neq \emptyset \\ Y_n.X'_{n+1} & \text{si } X_{n+1} = -1 \text{ et } Y_n = \emptyset \end{cases}$$

  Pour $x, y \in \mathbb{T}$, on aura noté $x.y$ l'opération de concaténation de x et y, et $\overleftarrow{x}$ l'opération consistant à retirer le dernier coefficient de x (pour $x \neq \emptyset$).

(a) Montrer que la marche aléatoire $(Y_n)_{n\geq 0}$ est transiente. On pourra considérer $H_n := d(\emptyset, Y_n)$ la distance de la marche à la racine au temps n (d étant la distance de graphe sur $\mathbb{T}_2$).

(b) Montrer que $(H_n/n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et déterminer sa limite.