ENS de Lyon $\hfill$ 2^{nd} semestre 2018-2019

L3 - Intégration et Probabilités

TD 11

Marches aléatoires.

Exercice 1 Récurrence en dimension 1

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^1 à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et soit pour tout $n \geq 0$, $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et $N \geq 0$, on note $g_N(x) := \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^N \mathbf{1}_{\{S_k=y\}}\right]$ et $T_x = \inf\{k \in \mathbb{N}, S_k = x\}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $S_n^{(k)} := S_{n+k} - S_k$.

1. Montrer à l'aide de la loi forte des grands nombres que si $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ est transiente.

   On suppose désormais que $\mathbb{E}[X_1] = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, $g_N(0) \geq g_N(x)$. On pourra faire une partition de l'univers selon les valeurs prises par T_x, et faire apparaître $S^{(k)}$ sur l'événement $\{T_x = k\}$.
3. En déduire que pour tout $a > 0$, on a
$$g_N(0) \geq \frac{1}{1+2\lceil aN\rceil} \sum_{|x|\leq\lceil aN\rceil} g_N(x) \geq \frac{1}{1+2\lceil aN\rceil} \sum_{k\leq N} \mathbb{P}\left(\frac{|S_k|}{k} \leq a\right).$$
4. Conclure que la marche aléatoire est récurrente en dimension 1.
5. Peut-on adapter ce raisonnement aux dimensions supérieures ?

Exercice 2 *Marches aléatoires réfléchies.*

1. Soit $p \in (0,1)$, et $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On définit les processus $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(T_n)_{n\geq 0}$ par récurrence par $S_0 = T_0 = 0$ et
$$\forall n \geq 0, \quad S_{n+1} = S_n + X_{n+1}, \qquad T_{n+1} = |T_n + X_{n+1}|.$$
   Ces processus sont appelés respectivement marche aléatoire simple biaisée sur $\mathbb{Z}$ de paramètre p, et marche aléatoire simple biaisée sur $\mathbb{N}$ de paramètre p.
   (a) Déterminer selon la valeur de p la récurrence ou la transience de chacune des deux marches aléatoires.
   (b) Montrer que dans le cas transient, p.s. $(T_n - S_n)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang. En déduire la convergence p.s. de $(T_n/n)_{n\geq 0}$.
2. Soit $\mathbb{T}_2$ l'arbre binaire infini. Tous ses sommets ont trois voisins (dont un peut être vu comme son parent), sauf un sommet particulier, le sommet racine, qui en a deux. On considère $(Y_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{T}_2$.

   [Formellement, on peut représenter $\mathbb{T}_2$ comme étant $\bigcup_{n\geq 0}\{0,1\}^n$ l'ensemble des suites finies constituées de 0 et de 1 (avec $\{0,1\}^0 := \{\emptyset\}$ la suite vide), l'ensemble $\{0;1\}^n$ constituant les sommets de la génération n. Ainsi l'élément $(0,1,1)$ par exemple pourra être vu comme le fils droit du fils droit du fils gauche de la racine.

   On construit alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{T}_2$ comme suit. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$, ainsi qu'une suite auxiliaire $(X'_k)_{k\geq 1}$ de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{0,1\}$. On construit $(Y_n)_{n\geq 0}$ par récurrence :

- On pose $Y_0 = \emptyset$.
- Soit $n \geq 0$, supposons Y_n construit. On pose

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n.X_{n+1} & \text{si } X_{n+1} \in \{0,1\} \\ \overleftarrow{Y_n} & \text{si } X_{n+1} = -1 \text{ et } Y_n \neq \emptyset \\ X'_{n+1} & \text{si } X_{n+1} = -1 \text{ et } Y_n = \emptyset \end{cases}$$

  Pour $x, y \in \mathbb{T}$, on aura noté $x.y$ l'opération de concaténation de x et y, et $\overleftarrow{x}$ l'opération consistant à retirer le dernier coefficient de x (pour $x \neq \emptyset$).]

Montrer que la marche aléatoire $(Y_n)_{n\geq 0}$ est transiente, et déterminer la *vitesse de fuite en l'infini* (c'est-à-dire donner un équivalent de $H_n := d(\emptyset, Y_n)$ la distance de la marche à la racine au temps n (d étant la distance de graphe sur $\mathbb{T}_2$)).

Exercice 3 *Sur un théorème de Lévy*

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique. On pose $M_n := \max_{k\leq n} S_k$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ fixé. On pose

$$I := \inf\{i \geq 0, S_i = a\}, \qquad \forall i \geq 1,\ \widetilde{X_i} := \begin{cases} X_i, & \text{si } i \leq I \\ -X_i, & \text{si } i > I \end{cases}, \qquad \forall n \geq 0,\ \widetilde{S}_n := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X_i}.$$

   Montrer que $(\widetilde{X_1}, \dots \widetilde{X_n})$ a la même loi que $(X_1, \dots X_n)$ (indication : montrer que $(\widetilde{X_1}, \dots \widetilde{X_n})$ est l'image de $(X_1, \dots X_n)$ par une involution de $\{-1, +1\}^n$). En déduire la même chose pour S et $\widetilde{S}$.
2. Montrer que pour tout $p \geq 0$, $q \leq p$, on a $\mathbb{P}(M_n \geq p, S_n \leq q) = \mathbb{P}(S_n \geq 2p - q)$.
3. En déduire que $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \frac{M_n}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge en loi vers (S, M) qui admet pour densité

$$(s, m) \mapsto \frac{2(2m - s)}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(2m-s)^2/2} \mathbf{1}_{\{m\geq 0\}} \mathbf{1}_{\{s\leq 0\}}$$

   par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer les lois de S, M et $M - S$.
5. Déterminer la loi de $(2M - S, M)$.