ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2018-2019

L3 - Intégration et Probabilités

TD 12

Révisions.

Exercice 1 *Réviser avec un QCM*

Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux (ou une réponse parmi (a), (b) et (c)), et justifier la réponse.

1. Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $2 \leq k \leq n$, X_k est indépendant de $(X_1, ..., X_{k-1})$. Alors la famille $(X_1, ..., X_n)$ est indépendante.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes de X. Peut-on affirmer que X est indépendant de $Y + Z$?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse Y indépendant de Z.
   (c) Non.
3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles dans L^1. Peut-on affirmer que XY est dans L^1 ?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse X indépendant de Y.
   (c) Non.
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes convergeant presque sûrement vers X. Alors X est constante presque sûrement.
5. Soit X une variable aléatoire non presque-sûrement nulle, et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Alors la suite de variables aléatoires $(u_n X)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite u_n converge vers 0.
6. Si X est une variable aléatoire à densité et si g est une fonction continue strictement croissante, alors $g(X)$ est une variable aléatoire à densité.

Exercice 2 *Convergence en probabilité*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X si et seulement si de toute sous-suite de $(X_n)_{n\geq 0}$ on peut à nouveau extraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers X.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers une v.a. réelle X, alors $(f(X_n))_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Exercice 3 *Convergence d'intégrale*

Déterminer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1} f(\frac{x}{n}) e^{-x} dx,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée.

Exercice 4 *Stabilité et variance finie*

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie, dont la somme a même loi qu'une transformation affine de X. Montrer que X est de loi gaussienne.

Exercice 5 *Loi limite*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées de variance 1, et $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Quelle est la limite en loi de $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \frac{S_{2n}}{\sqrt{n}})$? En déduire que l'on ne peut pas améliorer le TCL pour avoir mieux qu'une convergence en loi.

Exercice 6 *Groupe fini*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un groupe fini G. On suppose que X est uniforme.

1. Montrer que YX est uniforme.
2. Montrer que YX est indépendante de X si et seulement si Y est uniforme.

(ceci se généralise à un groupe compact, où uniforme signifie distribué selon la mesure de Haar).

Exercice 7 *Convergence de lois Gaussiennes*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telles que chaque X_n suit une loi Gaussienne $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$, où $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi si et seulement si $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ sont des suites convergentes.

Exercice 8 *Graphe aléatoire d'Erdős-Rényi*

Soit $n \geq 1$ et $p \in [0,1]$. On construit le graphe aléatoire $G(n,p)$ ainsi : son ensemble de sommets est $V_n = \{1, \dots, n\}$, et son ensemble d'arêtes est $\{\{i,j\}, 1 \leq i < j \leq n, X_{ij} = 1\}$, où $(X_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ est un tableau triangulaire i.i.d. de loi $\mathrm{Be}(p)$.

1. Soit $\mathcal{P}$ une propriété de graphe croissante, c'est-à-dire stable par ajout d'arête (exemple : existence d'un certain sous-graphe). Montrer que $p \mapsto \mathbb{P}(G(n,p)$ vérifie $\mathcal{P})$ est une fonction croissante.
2. On prend maintenant $n \to \infty$ et $p = p_n$ dépendant de n. Pour $p_n = c/n$, donner une loi limite pour le degré d'un sommet fixé.
3. Pour une certaine propriété de graphe, un seuil est une suite $p_n^\star$ telle que
$$\mathbb{P}(G(n,p_n) \text{ vérifie } \mathcal{P}) \to \begin{cases} 0, & \text{si } p_n = o(p_n^\star) \\ 1, & \text{si } p_n^\star = o(p_n) \end{cases}.$$
Donner un seuil pour l'existence d'une sous-graphe complet de taille 4.
4. On prend $p_n = \log n/n + c/n$ et l'on note I_n le nombre de sommets isolés de $G(n,p_n)$.
   (a) Calculer la limite de $\mathbb{E}[\binom{I_n}{k}]$.
   (b) Quand X est une loi de Poisson de paramètre λ, que vaut $\mathbb{E}[\binom{X}{k}]$?
   (c) Soit $(X_n)_n$, X des variables aléatoires telles que pour tout k, $\mathbb{E}[X_n^k] \to \mathbb{E}[X^k]$ et telle que la loi de X est la seule loi ayant ces moments. Montrer que $X_n \to X$ en loi.
   (d) Conclure.
5. Montrer que $\log n/n$ est un seuil pour la connexité.