ENS de Lyon
L3 - Intégration et Probabilités

2nd semestre 2018-2019

TD 12, version 2
Révisions.

1 Énoncés

Exercice 1 *Réviser avec un QCM*

Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux (ou une réponse parmi (a), (b) et (c)), et justifier la réponse.

1. Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $2 \leq k \leq n$, X_k est indépendant de $(X_1, ..., X_{k-1})$. Alors la famille $(X_1, ..., X_n)$ est indépendante.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes de X. Peut-on affirmer que X est indépendant de $Y + Z$?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse Y indépendant de Z.
   (c) Non.
3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles dans L^1. Peut-on affirmer que XY est dans L^1 ?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse X indépendant de Y.
   (c) Non.
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes convergeant presque sûrement vers X. Alors X est constante presque sûrement.
5. Soit X une variable aléatoire non presque-sûrement nulle, et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Alors la suite de variables aléatoires $(u_n X)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite u_n converge vers 0.
6. Si X est une variable aléatoire à densité et si g est une fonction continue strictement croissante, alors $g(X)$ est une variable aléatoire à densité.

Exercice 2 *Convergence en probabilité*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X si et seulement si de toute sous-suite de $(X_n)_{n\geq 0}$ on peut à nouveau extraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers X.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers une v.a. réelle X, alors $(f(X_n))_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Exercice 3 *Convergence d'intégrale*

Déterminer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1} f(\frac{x}{n}) e^{-x} dx,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée.

Exercice 4 *Stabilité et variance finie*

Une version plus facile : soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie telles que toute combinaison linéaire a même loi qu'une transformation affine de X. Montrer que X est de loi gaussienne.

Version initiale, moins facile (cf indications) : Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie, dont la somme a même loi qu'une transformation affine de X. Montrer que X est de loi gaussienne.

Exercice 5 *Loi limite*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées de variance 1, et $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Quelle est la limite en loi de $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \frac{S_{2n}}{\sqrt{n}})$? En déduire que l'on ne peut pas améliorer le TCL pour avoir mieux qu'une convergence en loi.

Exercice 6 *Groupe fini*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un groupe fini G. On suppose que X est uniforme.

1. Montrer que YX est uniforme.
2. Montrer que YX est indépendante de X si et seulement si Y est uniforme.

(ceci se généralise à un groupe compact, où uniforme signifie distribué selon la mesure de Haar).

Exercice 7 *Convergence de lois Gaussiennes*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telles que chaque X_n suit une loi Gaussienne $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$, où $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi si et seulement si $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ sont des suites convergentes.

Exercice 8 *Graphe aléatoire d'Erdős-Rényi*

Soit $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$. On construit le graphe aléatoire $G(n, p)$ ainsi : son ensemble de sommets est $V_n = \{1, \dots, n\}$, et son ensemble d'arêtes est $\{\{i, j\}, 1 \leq i < j \leq n, X_{ij} = 1\}$, où $(X_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ est un tableau triangulaire i.i.d. de loi $\mathrm{Be}(p)$.

1. Soit $\mathcal{P}$ une propriété de graphe croissante, c'est-à-dire stable par ajout d'arête (exemple : existence d'un certain sous-graphe). Montrer que $p \mapsto \mathbb{P}(G(n, p)$ vérifie $\mathcal{P})$ est une fonction croissante.
2. On prend maintenant $n \to \infty$ et $p = p_n$ dépendant de n. Pour $p_n = c/n$, donner une loi limite pour le degré d'un sommet fixé.
3. Pour une certaine propriété de graphe, un seuil est une suite $p_n^\star$ telle que
$$\mathbb{P}(G(n, p_n) \text{ vérifie } \mathcal{P}) \to \begin{cases} 0, & \text{si } p_n = o(p_n^\star) \\ 1, & \text{si } p_n^\star = o(p_n) \end{cases}.$$
Donner un seuil pour l'existence d'une sous-graphe complet de taille 4.
4. On prend $p_n = \log n/n + c/n$ et l'on note I_n le nombre de sommets isolés de $G(n, p_n)$.
   (a) Calculer la limite de $\mathbb{E}[\binom{I_n}{k}]$.
   (b) Quand X est une loi de Poisson de paramètre λ, que vaut $\mathbb{E}[\binom{X}{k}]$?
   (c) À partir de là jusqu'à la fin de l'exo c'est dûr... allez voir les indications ! Soit $(X_n)_n$, X des variables aléatoires telles que pour tout k, $\mathbb{E}[X_n^k] \to \mathbb{E}[X^k]$ et telle que la loi de X est la seule loi ayant ces moments. Montrer que $X_n \to X$ en loi.
   (d) Conclure.
5. Montrer que $\log n/n$ est un seuil pour la connexité.

2 Indications

1. voir corrigé.
2. Question 1 : Fabrication d'une sous-suite tq $\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > 1/k)$ est sommable pour le sens direct. Pour le sens réciproque, prendre une sous-suite qui nie la convergence en proba, on ne pourra rien en extraire. Remarque : le sens réciproque est immédiat quand on sait que la convergence en probabilité est bien la convergence pour une certaine topologie [1]. Remarque : la convergence p.s. ne provient pas d'une topologie, sinon cet exercice dirait que convergence en proba implique convergence p.s.
   Question 2 : f n'est pas uniformément continue, mais comme X_n converge vers X on peut trouver un compact dans lequel X est avec grande probabilité (et donc tous les X_n aussi àpcr), et raisonner sur ce compact.
3. C'est l'intégrale de $f(\cdot/n)$ contre une certaine densité de probabilité. Deux options : l'identifier comme une loi connue ou un "mélange" de loi connues (par exemple par calcul de sa fonction caractéristique), ou en calculer ses deux premiers moments.
4. (a) Version facile : que dire d'une somme de copies de X i.i.d. ? Appliquer le TCL.
   (b) Version moins facile : Déjà se ramener au cas centré. Montrer alors que la fonction caractéristique vérifie l'équation $\phi(t)^2 = \phi(\sqrt{2}t)$. Par ailleurs elle est dérivable en zéro, et localement on peut passer au logarithme...
5. On peut appliquer le TCL à chacune des deux coordonnées, mais comme elles ne sont pas indépendantes on ne peut rien en conclure. Par contre on peut écrire ce couple comme fonction d'un certain couple indépendant.
   Pour la deuxième partie, si $S_n/\sqrt{n}$ convergeait en probabilité vers X, alors $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \frac{S_{2n}}{\sqrt{n}})$ convergerait en probabilité vers $(X, \sqrt{2}X)$. Mais...
6. RAS
7. On suppose la convergence, et on dispose du théorème de Lévy, dont on essaie d'extraire la convergence des paramètres. Pour la variance c'est immédiat, mais pour la moyenne on commencera par montrer de manière élémentaire qu'elle est bornée, puis on fera gaffe à la non-injectivité de $u \mapsto e^{itu}$. Rq : cela implique que la limite en loi de gaussiennes est gaussienne...
8. 1. Construire un couplage
   2. Classique
   3. Soit $A_n = \#\{\text{copies du graphe complet de taille 4}\}$. Calculer la moyenne et la variance de A_n en fonction de n et p_n. Quand $\mathbb{E}[A_n] \to 0$, c'est clair que $\mathbb{P}(A_n \geq 1) \to 0$. (pourquoi ?) Pourquoi $\mathbb{E}[A_n] \to \infty$ ne suffit-il pas à déduire $\mathbb{P}(A_n \geq 1) \to 1$? Qu'apporte la variance en plus dans ce cas ?
   4. (a) Il faut voir cette éspérance comme celle d'une somme d'indicatrices. On trouve à la fin $\frac{(e^{-c})^k}{k!}$.
      (b) Calcul direct
      (c) Vraiment pas évident. Déjà montrer la tension, qui provient de la convergence des deux premiers moments. Ensuite montrer que si on a une sous-suite qui converge en loi, alors sa limite est X. Vu l'hypothèse, il faut montrer que ses moments sont ceux de X. Problème : les moments ne passent à priori pas à la convergence en loi. Il faut donc utiliser un procédé de troncature avec la fonction $x \mapsto (-a \vee x \wedge a)^k$ qui est continue bornée...

1. En fait la convergence en proba est métrisable par la métrique $d(X,Y) = \mathbb{E}[|X-Y| \wedge 1]$ ou $d(X,Y) = \inf_{\delta > 0}(\mathbb{P}(|X-Y| > \delta) + \delta)$

(d) Il faut montrer que Poisson est déterminée par ses moments. Mais les moments de Poisson sont à croissance polynomiale (cf question b). Aussi on en déduit qu'on peut inverser espérance et somme dans l'expression de la fonction caractéristique d'une loi ayant ces moments. On obtient une série entière de rayon de convergence infini. Donc les moments déterminent la loi.

5. Quand il y a des sommets isolés (propriété monotone) on ne peut pas être connexe... Pour montrer qu'on est connexe au dessus du seuil, étudier l'espérance du nombre de coupes de l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles non reliés.

3 Corrigés

Exercice 1 *Réviser avec un QCM*

Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux (ou une réponse parmi (a), (b) et (c)), et justifier la réponse.

1. Oui, par récurrence !
2. Réponse 3 : non. Soit Y et Z indépendantes Bernoulli(1/2), et $X = Y + Z$ mod 2. Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \perp\!\!\!\perp Z$, $Y \perp\!\!\!\perp Z$. Mais on n'a pas $X \perp\!\!\!\perp Y + Z$ puisque les deux côtés ont la même parité.
3. Réponse 2 : oui, si l'on a de plus l'hypothèse X indépendant de Y, par application de Fubini. Pas vrai en général (prendre $X = Y \in L^1 \setminus L^2$).
4. Oui, car alors X est mesurable vis-à-vis de la tribu de queue des (X_n), donc par la loi du 0-1 est presque sûrement déterministe.
5. C'est vrai : si $u_n \to 0$, alors $\mathbb{P}(|u_n X_n| > \varepsilon) \to 0$ par TCD. Réciproquement, si il existe $\delta > 0$ et une sous-suite $|u_n| > \delta$, alors $\mathbb{P}(|u_n X_n| > \varepsilon) \geq \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon/\delta) \not\to 0$ dès que ε est assez petit.
6. Non. On prend $F(t) = 1/2(t+\text{Diable}(t))$. Ceci est une fonction de répartition strictement croissante, donc on peut obtenir X de fonction de répartition F en prenant $X = F^{-1}(U)$ où U est uniforme $[0, 1]$. Mais X n'est pas à densité puisque F n'est pas l'intégrale de sa dérivée p.p.

Exercice 2 *Convergence en probabilité*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles.

1. Grâce à la convergence en proba, pour tout k on peut trouver par induction $n_k > n_{k-1}$, $P(|X_{n_k} - X| > 1/k) < 2^{-k}$. On applique ensuite Borel-Cantelli est on est content. Réciproquement si on n'a pas de convergence en proba, on peut trouver une suite n_k et $\varepsilon > 0$ tq $\inf_k \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) > 0$. Alors toute sous-suite de cette suite a la même propriété et ne peut donc pas converger en proba, encore moins p.s.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M > 0$. Soit δ d'uniforme continuité avec ϵ pour f sur $[-2M, 2M]$. Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}(|X| > M) + \mathbb{P}(|X| > M, |X_n| > 2M) + \mathbb{P}(|X| \leq M, |X_n| \leq 2M, |f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}(|X| > M) + \mathbb{P}(|X_n - X| > M) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \delta)
\end{aligned}$$

Maintenant on peut rendre la somme aussi petite qu'on veut en prenant d'abord M grand puis n grand. CQFD.

Exercice 3 *Convergence d'intégrale* Pour $n = 1$, on remarque que $\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}$ est la densité de la loi exponentielle. Que se passe-t-il pour $n \geq 2$? Calculons la fonction caractéristique. Pour $t \in \mathbb{R}, n \geq 2$, par intégration par parties, on a

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{itx}e^{-x}dx = \frac{1}{1-it}\frac{1}{(n-2)!}\int_0^\infty x^{n-2}e^{itx}e^{-x}dx.$$

Donc par récurrence, on a montré que $\int_0^\infty \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}e^{itx}dx = (\frac{1}{1-it})^n$, ce qui montre que $\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}$ est la densité de la somme de n exponentielles indépendantes.

Donc le truc à calculer se récrit $\mathbb{E}[f(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n})]$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont iid exponentielles. Donc le truc converge vers $f(1)$, par LFGN+TCD.

Exercice 4 *Stabilité et variance finie*

Corrigé de la version difficile : commençons par recentrer le problème. Soit $m = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Posons $X' = (X-m)/\sigma^2$, $Y' = (Y-m)/\sigma^2$. Alors $X'+Y' \overset{\mathcal{L}}{=} \sigma^2((aX+b)-2m) = cX'+d$. Sauf qu'en prenant variance et espérance à gauche et à droite on voit tout de suite $c = \sqrt{2}$, $d = 0$. On a donc $X'+Y' \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{2}X'$. Maintenant dénotons par ϕ la f.c. de X'. On a alors $\phi(t)^2 = \phi(\sqrt{2}t)$. Par récurrence on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, $\phi(t)^{2^k} = \phi(2^{k/2}t)$.

Soit $\varepsilon > 0$ tq l'on peut définir un logarithme complexe sur $\phi(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ (OK par continuité de ϕ). On pose $f = \log\phi$. Alors pour $u \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $k \geq 0$ on pose $t = 2^{-k/2}u$ et on obtient $\phi(2^{-k/2}u)^{2^k} = \phi(u)$, çàd

$$f(2^{-k/2}u) = 2^{-k}f(u).$$

Or comme ϕ est dérivable deux fois en 0, et que $\phi'(0) = 0$, $\phi''(0) = 1$, on a $f(t) = -t^2/2 + o(t^2)$. En calculant l'équivalent asymptotique à gauche dans l'équation ci-dessus, on obtient $2^{-k}f(u) \sim -2^{-k}u^2/2$ quand $k \to \infty$. On déduit que $f(u) = -u^2/2$, et donc que sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\phi(u) = e^{-u^2/2}$.

Par unicité de l'extension d'une fonction analytique, cette égalité est vraie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *Loi limite*

Soit $A_n = n^{-1/2}\sum_{k=1}^n X_n$, $B_n = n^{-1/2}\sum_{k=n+1}^{2n} X_n$. Alors $A_n \perp\!\!\!\perp B_n$ et par TCL, A_n et B_n convergent vers des gaussiennes centrées réduites. Donc $(A_n, B_n) \to (X, Y)$ où $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$. Donc par image continue, $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \frac{S_{2n}}{\sqrt{n}}) = (A_n, A_n + B_n)$ converge en loi vers $(X, X+Y)$.

Comme donné dans l'indication, si $S_n/\sqrt{n}$ convergeait en probabilité vers Z, alors $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \frac{S_{2n}}{\sqrt{n}})$ convergerait en probabilité vers $(Z, \sqrt{2}Z)$. Mais l'égalité en loi $(Z, \sqrt{2}Z) = (X, X+Y)$ est impossible : calculons par exemple la covariance croisée des deux côtés, ou constatons que la première a support dans une droite tandis que la seconde est à densité...

Exercice 6 *Groupe fini*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un groupe fini G. On suppose que X est uniforme.

1. $\mathbb{P}(YX = a) = \sum_{y\in G}\mathbb{P}(YX = a, Y = y) = \sum_{y\in G}\mathbb{P}(X = y^{-1}a, Y = y) = \sum_{y\in G}\mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = y^{-1}a) = \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\mathbb{P}(Y = y) = \frac{1}{|G|}$.
2. $\mathbb{P}(YX = a, X = b) = \mathbb{P}(Y = ab^{-1}, X = b) = \mathbb{P}(Y = ab^{-1})\frac{1}{|G|}$.

   Donc $YX \perp\!\!\!\perp X \iff \forall a, b, \quad \mathbb{P}(Y = ab^{-1})\frac{1}{|G|} = \frac{1}{|G|^2} \iff \forall a, b, \quad \mathbb{P}(Y = ab^{-1}) = \frac{1}{|G|}$. Ceci équivaut bien à Y uniforme.

Exercice 7 *Convergence de lois Gaussiennes*

Si ça converge, alors pour tout t, $e^{itm_n - t^2\sigma_n^2/2} = \phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$. En prenant le module, $e^{-\sigma_n^2t^2/2} \to |\phi_X(t)|$. On prend désormais $t \neq 0$ dans un voisinage de 0 où ϕ_X ne s'annule pas. On peut prendre le log pour obtenir $\sigma_n^2 \to -t^{-2}\log(|\phi_X(t)|) = \sigma^2$ (indépendant de t tel que çe calcul est valable.)

Passons à la suite m_n. Déjà montrons qu'elle est bornée. Vu que $\mathbb{P}(X_n \geq m_n) = \mathbb{P}(X_n \leq m_n) = 1/2$, une sous-suite telle que $m_n \to \infty$ empêcherait une convergence en loi. Soit maintenant une sous-suite de m_n et par compacité extrayons une sous-sous-suite convergente (vers m). Montrons que m ne dépend pas du choix de la sous-sous-suite. On a $e^{itm_n} \to \phi_X(t)/|\phi_X(t)| = f(t)$, pour t au voisinage de 0. On obtient $e^{itm} = f(t)$ ce qui détermine m modulo $2\pi/t$. Il suffit de prendre t, t' dans notre voisinage de 0 non rationnellement équivalents pour déterminer m sans ambiguité. On conclut.

Exercice 8 *Graphe aléatoire d'Erdős-Rényi*

Soit $n \geq 1$ et $p \in [0,1]$. On construit le graphe aléatoire $G(n,p)$ ainsi : son ensemble de sommets est $V_n = \{1, \ldots, n\}$, et son ensemble d'arêtes est $\{\{i,j\}, 1 \leq i < j \leq n, X_{ij} = 1\}$, où $(X_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est un tableau triangulaire i.i.d. de loi $\mathrm{Be}(p)$.

1. Posons $(U_{ij})_{1 \leq i < j}$ un tableau i.i.d. infini d'uniformes. On peut alors définir

$$G(n,p) = (V_n, E_n^p = \{\{i,j\}, 1 \leq i < j \leq n, U_{ij} < p\}).$$

Tous les $G(n,p)$ pour p, n variant sont définis sur le même espace de proba, et pour $p < p'$, $G(n,p) \subset G(n,p')$. Alors l'évènement $\{G(n,p) \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$ est inclus dans l'évènement $\{G(n,p') \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$, d'où l'inégalité de probabilités.

2. Le degré d'un sommet fixé suit une loi binomiale $\mathrm{Bi}(n, c/n)$ qui converge en loi vers $\mathrm{Po}(c)$.

3. Soit

$$A_n = \#\{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n : \forall 1 \leq a < b \leq 4, \{i_a, i_b\} \in G(n, p_n)\}.$$

On a, en utilisant la linéarité de l'espérance pour traverser la somme, et l'indépendance des différentes arêtes pour traverser le produit, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} \prod_{\forall 1 \leq a < b \leq 4} \mathbf{1}_{\{i_a, i_b\} \in G(n,p_n)}\right] \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} \prod_{\forall 1 \leq a < b \leq 4} \mathbb{P}(\{i_a, i_b\} \in G(n, p_n)) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} p_n^6 = \binom{n}{4} p_n^6 \sim \frac{1}{4!} n^4 p_n^6.
\end{aligned}$$

On a la dichotomie suivante :

$$\mathbb{E}[A_n] \to \begin{cases} 0, & p_n = o(n^{-2/3}) \\ \infty, & n^{-2/3} = o(p_n) \end{cases}.$$

Dans le cas où l'espérance tend vers 0, la probabilité de dépasser 1 tend vers 0 par une application immédiate de l'inégalité de Markov. Dans le cas où l'espérance tend vers ∞, on ne peut pas immédiatement conclure. On va montrer que la variable A_n est proche de son espérance (concentration) en calculant la variance. On se place désormais dans le cas $n^{-2/3} = o(p_n)$, çàd $p_n^{-1} = o(n^{2/3})$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A_n^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq n} \prod_{\forall 1 \leq a < b \leq 4} \mathbf{1}_{\{i_a, i_b\} \in G(n,p_n)} \prod_{\forall 1 \leq a < b \leq 4} \mathbf{1}_{\{j_a, j_b\} \in G(n,p_n)}\right] \\
&= \binom{n}{8}\binom{8}{4} p_n^{12} + \binom{n}{7}\binom{7}{1}\binom{6}{3} p_n^{12} + \binom{n}{6}\binom{6}{2}\binom{4}{2} p_n^{11} + \binom{n}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{1} p_n^9 + \binom{n}{4} p_n^6 \\
&= \left(\frac{1}{4!4!} + o(1)\right) n^8 p_n^{12} + O(n^7 p_n^{12} + n^6 p_n^{11} + n^5 p_n^9 + n^4 p_n^6)
\end{aligned}$$

Alors qu'en mettant au carré le premier moment, on a $\mathbb{E}[A_n]^2 = \left(\frac{1}{4!4!} + o(1)\right) n^8 p_n^{12}$. On en déduit en soustrayant que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A_n) &= o(n^8 p_n^{12}) + n^8 p_n^{12} O(n^{-1} + n^{-2}p_n^{-1} + n^{-3}p_n^{-3} + n^{-4}p_n^{-6}) \\ &= o(n^8 p_n^{12}) + n^8 p_n^{12}(O(n^{-1}) + o(n^{-4/3}) + o(n^{-1}) + o(1)) = o(n^8 p_n^{12}).\end{aligned}$$

On a montré $\mathrm{Var}(A_n) = o(\mathbb{E}[A_n]^2)$. Cela suffit à conclure par Bienaymé-Tchébychev.

$$\mathbb{P}(A_n = 0) \leq \mathbb{P}(|A_n - \mathbb{E}[A_n]| \geq \mathbb{E}[A_n]) \leq \frac{\mathrm{Var}(A_n)}{\mathbb{E}[A_n]^2} = o(1)$$

4. On prend $p_n = \log n/n + c/n$ et l'on note I_n le nombre de sommets isolés de $G(n, p_n)$.
   (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\binom{I_n}{k}\right] &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(i_1, \ldots i_k \text{ isolés }) \\ &= \binom{n}{k}(1-p_n)^{\binom{k}{2}+k(n-k)} \\ &\sim \frac{n^k}{k!}\exp(((k-1)/2 + n - k)k\log(1-p_n)) \\ &= \frac{1}{k!}\exp\Big(k\Big(\log(n) + (n+o(n))(-\log n/n - c/n + o(\log n/n)\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{k!}\exp\Big(k\Big(\log(n) + (n+o(n))(-\log n/n - c/n + O(\log^2 n/n^2)\Big)\Big) \to \frac{(e^{-c})^k}{k!}\end{aligned}$$

   (b) On a $\mathbb{E}[\binom{X}{k}] = e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}$.
   (c) Cherchons d'abord à montrer la tension de la suite (X_n). Fixons $\varepsilon > 0$. Par la convergence des deux premiers moments, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|\mathbb{E}[X_n]| < M$, $\mathrm{Var}(X_n) < M$. Alors pour $a > 0$ et $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > M + a) \leq \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| > A) \leq M^2/a^2.$$

   Prenant a assez grand pour que $M^2/a^2 < \varepsilon$, on a trouvé un compact $K = [-M - a, M + a]$ tel que pour $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(X_n \notin K) < \varepsilon$. C'est la tension.
   Maintenant pour montrer la convergence en loi vers X il suffit de prendre une sous-suite quelconque de $(X_n)_n$, de trouver une sous-sous-suite convergente en loi (elle existe par compacité relative, grâce au théorème de Prokhorov), et de montrer que sa limite Z est en fait X.Pour cela, grâce à l'hypothèse, on a juste à montrer que les moments de Z sont égaux à ceux de X.
   Les moments ne passent à priori pas à la convergence en loi, aussi on utilise une procédure de tronquage : soit $c_a(x) = -a \vee x \wedge a$. Remarquons qu'on a $|c_a(x)| \leq |x|$ et $|c_a(x) - x| \leq |x|\mathbf{1}_{|x|\geq a}$. Déjà par convergence en loi, on a

$$\mathbb{E}[c_a(X_n^k)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[c_a(Z^k)].$$

   Comme $\mathbb{E}[X_n^{2k}] \geq \mathbb{E}[c_a(X_n^{2k})]$, on en déduit en prenant la limite des deux côtés que $\mathbb{E}[X^{2k}] \geq \mathbb{E}[c_a(Z^{2k})]$. Puis par convergence monotone en $a \to \infty$, $\mathbb{E}[Z^{2k}] < \infty$. Donc Z a tous ses moments, donc pour tout k, par TCD, $\mathbb{E}[c_a(Z^k)] \to_{a\to\infty} \mathbb{E}[Z^k]$.

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[X^k] - \mathbb{E}[Z^k]| \leq |\mathbb{E}[X^k] - \mathbb{E}[X_n^k]| + |\mathbb{E}[X_n^k] - \mathbb{E}[c_a(X_n^k)]| \\ + |\mathbb{E}[c_a(X_n^k)] - \mathbb{E}[c_a(Z^k)]| + |\mathbb{E}[c_a(Z^k)] - \mathbb{E}[Z^k]|\end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme tendent vers 0 à a fixé quand $n \to \infty$. Pour le deuxième, on a (même preuve que Markov) que $|\mathbb{E}[X_n^k] - \mathbb{E}[c_a(X_n^k)]| \leq \mathbb{E}[|X_n^k - c_a(X_n^k)|] \leq \mathbb{E}[|X_n|^k \mathbf{1}_{|X_n|^k > a}] \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[X_n^{2k}] \to_{n\to\infty} \frac{1}{a}\mathbb{E}[X^{2k}]$. On a donc

$$|\mathbb{E}[X^k] - \mathbb{E}[Z^k]| \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[X^{2k}] + |\mathbb{E}[c_a(Z^k)] - \mathbb{E}[Z^k]|.$$

Tout ceci tend vers 0 quand $a \to \infty$, d'où l'égalité des moments.

(d) La conclusion est immédiate, modulo le fait que la loi de Poisson est déterminée par ses moments. Mais comme les moments de Poisson croissent polynomialement (voir le calcul question b), on a que si X a les mêmes moments que Poisson, pour $t > 0$ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}[|X|^k]}{k!} < \infty$. Donc Fubini s'applique et pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathbb{E}[e^{zX}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^k \mathbb{E}[X^k]}{k!}$. En particulier les moments déterminent la f.c.

5. Si $p_n = \log n/n + c/n$, alors le nombre de sommets isolés tend vers une Poisson de paramètre e^{-c}. Donc la probabilité d'être connexe est majorée par celle d'avoir aucun sommet isolé, qui tend vers $e^{-e^{-c}}$. Si $p_n = o(\log n/n)$ alors pour tout c arbitrairement négatif, $p_n \leq \log n/n + c/n$ àpcr. Donc par monotonie de la propriété de connexité, la probabilité d'être connexe tend vers 0.

   Réciproquement pour $p_n >> \log n/n$, définissons A_n le nombre de coupes des sommets en deux parties non reliées. $A_n = \#\{K \subset V_n, |K| \leq n/2, K \not\leftrightarrow V_n \setminus K\}$. Si $A_n = 0$ alors le graphe est connexe.

$$\mathbb{E}[A_n] = \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n}{k}(1-p_n)^{k(n-k)} \leq \sum_{k=1}^{n/2} n^k \exp(-p_n k(n-k)) \leq \sum_{k=1}^{n/2} \exp(k[\log n - p_n(n-k)])$$

   $n-k$ étant plus grand que $n/2$, on a

$$\mathbb{E}[A_n] \leq \sum_{k=1}^{n/2} \exp(k[\log n - np_n]) \leq \frac{\exp(\log n - np_n)}{1 - \exp(\log n - np_n)}$$

   par somme géométrique. Ça tend vers 0 et on conclut par Markov.