ENS de Lyon 2nd semestre 2018-2019
L3 - Intégration et Probabilités

TD 2

Variables aléatoires et lois de variables aléatoires.

Exercice 1 *Autour du tirage à deux dés*

1. Modéliser l'expérience qui consiste à jeter deux dés, et à sommer les deux nombres obtenus à l'aide successivement :
   — de l'espace $\Omega_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;
   — de l'espace $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$;
   — de l'espace $\Omega_3 = \{\{i, j\}\ ;\ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
2. Relier ces espaces entre eux à l'aide de variables aléatoires.

Exercice 2 *Votre premier couplage*

Soit $p \in [0, 1]$. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p définies sur le même espace probabilisé. Que peut être la loi de la variable aléatoire $Z := \max(X, Y)$?

Exercice 3 *Calcul de lois*

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de (X, Y) est
$$\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-x/2}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbf{1}_{[0;2\pi]}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.
2. On suppose que la loi de (X, Y) est
$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Dans chacun des cas, identifier la loi de X, de Y, et la loi calculée. Que peut-on dire sur la loi du couple (X, Y) dans chacun des cas ?

Exercice 4 *Lois de variables aléatoires*

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que la loi de (X, Y) est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
2. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
3. On suppose que X et Y ont même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement même loi.

Exercice 5 *Variables aléatoires ordonnées*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $(X_1, \ldots, X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\mathbf{1}_{[0;1]^n} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

1. Construire à l'aide des événements $A_\sigma := \{X_{\sigma_1} < \cdots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1 \leq \ldots \leq Y_n \quad \text{et} \quad \{Y_1, \ldots, Y_n\} = \{X_1, \ldots, X_n\}$$

presque sûrement.

2. Déterminer la loi des variables aléatoires $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n)$.