ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2018-2019
L3 - Intégration et Probabilités

TD 3
Lois, caractérisations de lois, moments

Exercice 1 *Moments et queue de probabilité*

1. Soit X une variable aléatoire positive. Soit $p > 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}[X > x] dx.$$
2. Notons $\varphi(x) = \mathbb{P}(X > x)$ la queue de probabilité de X. Montrer que si $X \in L^p$, alors $\lim_{x \to \infty} x^p \varphi(x) = 0$.
3. Donner un équivalent de la queue d'une variable de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 2 *La main à la pâte*

Calculer la fonction caractéristique, l'espérance et la variance des variables aléatoires de Bernoulli, binomiales, géométriques, de Poisson et exponentielles.

Exercice 3 *Simulation de lois de probabilité*

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. On définit G, pseudo-inverse de F comme suit :
$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ G(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\}$$

1. Prouver que :
   (a) Si F est continue, alors pour tout $t \in]0, 1[$, $F(G(t)) = t$;
   (b) Si F est strictement croissante, alors pour tout x réel, $G(F(x)) = x$;
   (c) Si F est continue et strictement croissante, alors F est inversible et $G = F^{-1}$;
   (d) Donner une condition (non nécessaire) pour que ces deux propriétés soient vérifiées.
2. Prouver que si F est continue et strictement croissante, alors la variable aléatoire $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. Si Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la fonction de répartition de $G(Y)$? *(On pourra vérifier que $\{G(U) \leq t\} = \cap_{n \geq 1} \{U < F(t + 1/n)\}$)*

Exercice 4 *Absence de mémoire*

1. On dit qu'une variable aléatoire réelle positive vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $t, s > 0$,
$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$
Déterminer toutes les variables aléatoires positives X qui vérifient la propriété d'absence de mémoire.
2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ désignant la partie entière de x).
Montrer que $\lfloor X \rfloor$ satisfait une propriété analogue à l'absence de mémoire pour les variables à valeur entière.

Exercice 5 *Fonction de répartition à deux valeurs*

Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probabilité μ, telle que $F(x) \in \{0; 1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de R. Montrer que μ est une mesure de Dirac.