TD 4

Indépendance

Exercice 1 *Échauffement*

1. Calculer la loi de la somme de deux variables de Poisson indépendantes.
2. Calculer la loi du minimum de deux lois exponentielles indépendantes.

Exercice 2 *Gaussiennes*

On dit qu'un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^n$ est *gaussien* si pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, $\langle t, X\rangle$ suit une loi gaussienne.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\langle t, X\rangle$ en fonction de $\mu = \mathbb{E}X$ et $\Sigma = \mathrm{Cov}(X) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{ij}$. En déduire la fonction caractéristique de X.
2. Soit X un vecteur de n gaussiennes centrées réduites indépendantes. Montrer que X est un vecteur gaussien. Calculer la fonction caractéristique de $AX + b$. Que dire de ce vecteur ? En déduire que pour tout $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in S_n^+$, on peut construire un vecteur Gaussien de moyenne μ et covariance Σ.
3. Montrer que si (X, Y) est un vecteur Gaussien avec $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$. Montrer que c'est faux quand on suppose juste que X et Y sont des Gaussiennes.

Questions supplémentaires

4. Montrer que si X est un vecteur de n gaussiennes centrées indépendantes et de même variance, alors X est invariant en loi sous l'action du groupe orthogonal.
5. Calculer la densité d'un vecteur Gaussien de covariance $\Sigma \in S_n^{++}$

Exercice 3 *Somme aléatoire*

Dans cet exercice, soit $(Y_i)_i$ une suite i.i.d. et N une variable aléatoire indépendente de la suite $(Y_i)_i$. On pose $X = \sum_{i=1}^N Y_i$.

1. Si Y_1 et N sont intégrables, montrer que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_1]$.
2. Si Y_i est à valeurs entières, calculer la fonction génératrice de X.
3. Si $Y_i \sim \mathrm{Geom}(p)$, et $N \sim \mathrm{Geom}(a)$. Calculer la loi de X puis donner une interprétation avec une suite de lancers de deux pièces.
4. Avec $Y_i \sim \mathrm{Be}(p)$ et $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Montrer également que $X \perp\!\!\!\perp N - X$.

Exercice 4 *La méthode probabiliste – un exemple*

L'objectif de l'exercice est de montrer que tout graphe (V, E) admet un sous-graphe biparti (V, E') avec au moins $\frac{1}{2}|E|$ arêtes.

[*Définition* : un graphe est *biparti* si l'ensemble des sommets est une union disjointe de deux ensembles A et B tels que toutes les arêtes joignent un sommet de A à un sommet et B.]

1. Inventer une construction aléatoire de deux ensembles A et B, calculer l'espérance de la variable aléatoire X_{xy} indicatrice de l'évènement (l'arête $\{x, y\}$ joint un point de A à un point de B).
2. Calculer l'espérance de $X = \sum X_{xy}$.
3. Conclure.

Exercice 5 *Caractérisations de la loi normale*

1. (*stabilité + variance finie*) Soit X, Y deux variables indépendantes de même loi, de variance finie, dont la somme a même loi qu'une transformation affine de X. Montrer que X est gaussienne.
2. (*rotations*) Soit X, Y deux variables indépendantes de même loi, telle que pour tout θ, $\cos(\theta)X + \sin(\theta)Y$ a même loi que X. Montrer que X est gaussienne centrée.
3. ($\star\star$)(*théorème de Bernstein*) Soit X, Y deux variables indépendantes de même loi, telles que $X + Y \perp\!\!\!\perp X - Y$. Montrer que X est gaussienne centrée.

Exercice 6 *Loi faible des grands nombres*

Soit $(X_i)_i$ une suite i.i.d. admettant une variance, et $S_n \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que $\mathbb{E}[|S_n/n - \mathbb{E}[X_1]|^2] \to 0$. En déduire que pour toute suite $\omega(n)$ tendant vers l'infini, $\mathbb{P}(n\mathbb{E}[X_1] - \omega(n)\sqrt{n} \leq S_n \leq n\mathbb{E}[X_1] + \omega(n)\sqrt{n}) \to 1$.