ENS de Lyon $\hfill$ 2nd semestre 2018-2019

L3 - Intégration et Probabilités

TD 5

Indépendance, Lemme de Borel-Cantelli, convergence presque sûre.

Exercice 1 *Lemme de Borel-Cantelli, réciproque et hypothèses*

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, telles que pour tout $n \geq 1$, $Y_n \sim \mathcal{E}(n)$.

1. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0. En déduire que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Y_n \leq Y_1$.
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes. Calculer $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y_n > Y_1)$. Commenter.
3. (*au cas où...*) Soit $X \sim \mathcal{B}(1/2)$. Calculer $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = 1)$. Commenter !

Exercice 2 *Somme et limite supérieure de variables aléatoires i.i.d.*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles positives i.i.d.

1. Montrer que presque sûrement $\sum_{n\geq 0} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a l'équivalence suivante

$$\mathbb{E}[X] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\Big(X \geq \alpha n\Big) < \infty.$$

Indication. On pourra montrer d'abord que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}\Big(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)\Big) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}\Big(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)\Big).$$

En déduire que presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty \text{ si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}.$$

Exercice 3 *Loi du 0-1 de Kolmogorov et séries entières aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

1. On suppose que les $(X_n)_{n\geq 0}$ sont positives. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge presque sûrement ou diverge presque sûrement.
2. Montrer que de manière générale, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} X_n z^n$ est presque sûrement constant.
3. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ ont même loi (et que cette loi n'est pas δ_0). Montrer que
   - Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] = \infty$, alors $R = 0$ p.s.
   - Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] < \infty$, alors $R = 1$ p.s.

   (où pour tout $x > 0$ on aura noté $\ln^+(x) := \max(\ln(x), 0)$). On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 4 *Loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires dans L^4*

Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires, admettant un moment d'ordre 4 fini. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Soit $\varepsilon > 0$, majorer efficacement en fonction des moments d'ordre 2 et 4 de $X_1 - \mathbb{E}[X_1]$ la probabilité $\mathbb{P}(|S_n/n - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon)$.
2. En déduire que
$$\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1] \quad \text{p.s.}$$

Exercice 5 *Loi forte des grands nombres, cas non intégrable*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X_1|] \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_1| \geq n).$$
2. En déduire que si X_1 n'est pas intégrable, alors $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Exercice 6 *Plus longue sous-suite de piles*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout entier n, on note R_n le nombre de X_i consécutifs prenant la valeur 1, à partir de l'indice n. Formellement,
$$R_n := \sup\{m \geq 1, X_n = X_{n+1} = .. = X_{n+m-1} = 1\}.$$
On notera également
$$M_n = \max(R_0, .., R_n).$$

1. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$
2. En déduire que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$
3. Conclure que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Exercice 7 *Convergence du maximum d'une suite de variables aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1 \quad \text{p.s.}$$
2. On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que
$$\liminf_{n\to\infty} (Z_n/\ln(n)) \geq 1 \quad \text{p.s.}$$
3. (*) On pose pour tout $n \geq 1$, $\phi(n) := \lceil \ln(n) \rceil$.
Montrer que $\limsup_n (Z_{\phi(n)}/\ln(\phi(n))) \leq 1$ p.s. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} (Z_n/\ln(n)) = 1 \quad \text{p.s.}$$