ENS de Lyon 2^{nd} semestre 2018-2019
L3 - Intégration et Probabilités

TD 6

LFGN et TCL, modes de convergence.

Exercice 1 *Comportement asymptotique de la marche aléatoire*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. dans $\mathbb{L}^1$. On pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

1. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] > 0$. Montrer que p.s., $\liminf_n S_n = +\infty$.
2. On suppose désormais que $\mathbb{E}[X_1] = 0$, et que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.
   (a) Soit $M > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M) > 0$
   (b) En déduire que p.s.,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

Exercice 2 *Convergence en loi de couples de variables aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers des variables aléatoires X et Y.

1. On suppose que les suites $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Ce couple converge-t-il en loi vers (X, Y) ?
2. De manière générale, a-t-on que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi ?
3. *(Lemme de Slutsky)* On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $Y = c$ p.s. (Y est déterministe).
   (a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers Y.
   (b) Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers (X, Y).
4. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. d'espérance nulle de loi différente de δ_0, et telles que $\mathbb{E}[Z_1^2] < +\infty$. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n Z_k \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n Z_k^2$$
   Montrer que
$$\frac{\sqrt{n}\bar{Z}_n}{\widehat{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
   Ce résultat est utilisé en statistiques quand on ne connaît pas la variance σ^2 et qu'on doit la remplacer par $\widehat{\sigma}_n^2$, une "estimation empirique" de la variance.

Exercice 3 *Convergence du maximum d'une suite de variables aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1 \quad \text{p.s.}$$
2. On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que
$$\liminf_{n\to\infty}(Z_n/\ln(n)) \geq 1 \quad \text{p.s.}$$
3. (*) On pose pour tout $n \geq 1$, $\phi(n) := \lceil \ln(n) \rceil$.
   Montrer que $\limsup_n (Z_{\phi(n)}/\ln(\phi(n))) \leq 1$ p.s. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty}(Z_n/\ln(n)) = 1 \quad \text{p.s.}$$

4. Établir la convergence en loi de $Z_n - \ln(n)$.

Exercice 4 *Convergence presque sûre et convergence en probabilité*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. À l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une sous-suite (à indices déterministes) $(X_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ convergeant vers X presque sûrement.

Proposer un exemple de suite convergeant en probabilité mais pas presque sûrement, et déterminer une sous-suite de celle-ci convergeant presque sûrement.

Exercice 5 *Implications et réciproques*

Compléter le diagramme en reliant ses éléments à l'aide de flèches d'implications (et éventuellement de réciproques partielles). On suppose que $q \geq p \geq 1$.

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{L}^q}{\longrightarrow}} X$

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} X$

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{L}^p}{\longrightarrow}} X$

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{L}^1}{\longrightarrow}} X$ $\qquad\qquad$ $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{(\mathrm{P})}{\longrightarrow}} X$

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$