TD 7

Convergence en loi, encore.

Exercice 1 *Convergences, exemples et contre-exemples*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètres respectifs $(p_n)_{n\geq 1}$.

1. À quelle condition sur la suite (p_n) a-t-on convergence en loi de la suite (X_n) ? A-t-on toujours dans ce cas convergence en probabilité ?
2. Supposons de plus l'indépendance de la famille (X_n). À quelle condition sur (p_n) a-t-on convergence presque sûre de (X_n) ?
3. À l'aide d'un couplage bien choisi, construire une suite de Bernoulli qui converge presque sûrement et en probabilité, mais ne vérifie pas cette dernière condition.

   Indication : On pourra construire les X_n à partir d'une variable uniforme commune.

Exercice 2 *Variation totale et convergence en loi de variables discrètes.*

On définit la distance en variation totale de deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ ainsi :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A) - \nu(A)| = \sup_{\substack{f:\mathbb{R}^d \to [-1,1] \\ f \text{ mesurable}}} |\mu(f) - \nu(f)| = \sup_{\substack{f:\mathbb{R}^d \to [-1,1] \\ f \text{ continue}}} |\mu(f) - \nu(f)|$$

1. (facultatif) justifier toutes ces égalités.
2. Montrer que la convergence en variation totale implique la convergence en loi. Donner un exemple de convergence en loi qui n'est pas en variation totale.
3. Montrer que pour des variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, la convergence en loi est équivalente à la convergence en variation totale.
4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X = k)$ converge. Est-ce que X_n converge en loi ?

Exercice 3 *Quelques convergences en loi*

1. Soit X_n une suite de variables aléatoires i.i.d de loi Exp(1). Montrer que $\max(X_1, \ldots, X_n) - \log n$ converge en loi. Quelle est sa limite ?
2. Montrer qu'une variable de Poisson de grand paramètre, bien renormalisée, converge en loi vers une variable Gaussienne.
3. (*) Soit $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. À quelles condition sur la suite $(m_n, \sigma_n)_{n\geq 1}$ a-t-on convergence en loi de $(X_n)_n$?
4. Soit X_n le moment de la première répétition lors d'une suite de tirages avec remise parmi n éléments. Trouver la limite en loi de $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 *Sommes de variables de Bernoulli*

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On considère $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(S_n \in I_n)$ quand n tend vers l'infini, lorsque

1. $I_n = [0, an]$, où $a \in]0, 1[$;
2. $I_n = [pn - 4\sqrt{n}, pn - \sqrt{n}]$;
3. $I_n = [pn - n^{1/3}, pn]$.

Exercice 5 *Convergence en probabilité dans le Théorème Central Limite ?*

On cherche à montrer que la convergence en loi dans le théorème central limite ne provient jamais d'une convergence en probabilité.

1. Sous l'hypothèse que la suite de variables aléatoires $(S_n/\sqrt{n})_n$ converge en probabilité, montrer que la suite
$$\frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$
converge en probabilité vers 0.
2. Étudier la convergence en loi de la variable aléatoire $\frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}$, et conclure.

Exercice 6 *Urnes de Pòlya et théorème de de Finetti*

Soit une urne contenant au départ a boules bleues (notée 0) et b boules noires (notée 1). On répète l'expérience suivante : On tire une boule de l'urne uniformément et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur.

1. Soit X_i la couleur de la boule tirée à l'étape i. Montrer que la suite $(X_i)_i$ est échangeable. En déduire qu'il existe une mesure μ sur $[0,1]$ telle que pour toute fonction $f : (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{0,1\})^{\otimes n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, $\mathbb{E}[f(X_1,\ldots)] = \int_0^1 \mathbb{E}_p[f(X_1,\ldots)]\mu(dp)$.
2. En déduire que presque sûrement $(\frac{X_1+\cdots X_n}{n})_n$ converge. Quelle est la loi de sa limite ?
3. Pour $a = b = 1$, que donne la mesure μ ?
4. (*) dans les autres cas ?