ENS de Lyon 2^{nd} semestre 2018-2019
L3 - Intégration et Probabilités

TD 8
Théorème de Finetti, transformation de Fourier.

Exercice 1 *L'urne de Pólya*

Une urne contient a boules noires (notées 0) et b boules blanches (notées 1). On répète l'expérience suivante : une boule est tirée de l'urne uniformément au hasard ; on note sa couleur, et on la remet dans l'urne, ainsi qu'une boule supplémentaire de la même couleur que celle-ci.

1. Proposer une modélisation probabiliste de cette expérience (pour simplifier, on pourra représenter les couleurs noir et blanc par 0 et 1).
2. Soit X_n la variable aléatoire modélisant la couleur de la boule tirée à l'étape n. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est échangeable.
   En déduire qu'il existe une mesure μ sur $[0,1]$ telle que pour toute fonction mesurable bornée $f : (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{0,1\})^{\otimes n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
   $$\mathbb{E}[f(X_1, X_2, \dots)] = \int_0^1 \mathbb{E}_p[f(Y_1, Y_2, \dots)]\mu(\mathrm{d}p),$$
   où sous $\mathbb{P}_p$, $(Y_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$.
   On rappelle que $\mathcal{P}(\{0,1\})^{\otimes n}$ est la plus petite tribu contenant les cylindres de $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$
3. En déduire que presque sûrement, la suite $(\frac{X_1+\cdots X_n}{n})_{n\geq 1}$ converge. Quelle est la loi de sa limite ?
4. Pour $a = b = 1$, quelle est la mesure μ ?
5. (*) Et dans les autres cas ?

Exercice 2 *Inversion de Fourier*

Pour $f \in L^1$, on note sa transformée de Fourier
$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$
Soit $H : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)$. On rappelle que $\widehat{H}(x) = \sqrt{2\pi}H(x)$.

1. Vous souvenez-vous de sa démonstration ?
   On note $h_\lambda(x) := \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer h_λ et vérifier que h_λ est une approximation de l'unité lorsque $\lambda \to 0$.
3. Soit $f \in L^1$, montrer que
   $$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\widehat{f}(t)\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t.$$
4. Soit $g \in L^\infty$ continue en un point $x \in \mathbb{R}$; montrer que
   $$\lim_{\lambda\to 0}(g * h_\lambda)(x) = g(x).$$
5. Soit $p \geq 1$, $f \in L^p$. Montrer que
   $$\lim_{\lambda\to 0} ||f * h_\lambda - f||_p = 0.$$

6. Soit $f \in L^1$, telle que $\hat{f} \in L^1$. Montrer que si l'on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{itx} \, dt,$$

alors

$$f(x) = g(x) \text{ p.p.}$$

7. Soit $f \in L^1$ telle que $\widehat{f} = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
Ainsi, la transformée de Fourier sur L^1 est injective.
8. (*) L'application $f \in L^1 \mapsto \widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ est elle surjective ?

Exercice 3 *Transformation de Fourier*

1. Soit A un borélien de mesure finie. Est-ce que $\widehat{\mathbf{1}_A}$ est dans L^1 ?
2. (a) Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \exp(-|x|)$ (on pourra utiliser le résultat montré au point 6 de l'exercice précédent).
   (b) En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy (dont on rappelle qu'elle admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$).
   (c) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy. Déterminer la loi de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
3. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurables, on rappelle que lorsque celle-ci est bien définie, on note pour $x \in \mathbb{R}$

$$f * g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) \, dt$$

la convolée de f et g. Le coefficient 2π en dénominateur est une convention pratiquée lorsque le cadre fait intervenir la transformée de Fourier.
   (a) Soit $f, g \in L^1$. Justifier le fait que $f * g$ est bien définie presque partout. Même question si $f, g \in L^2$.
   (b) Montrer que si $f, g \in L^1$, alors $\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.
   (c) En déduire que L^1 n'admet pas d'élément neutre pour la convolution.
   (d) Montrer que si $f, g \in L^2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f * g(x) = (\widehat{\widehat{f} \times \widehat{g}})(-x).$$

   (e) Montrer qu'il existe deux fonctions non nulles $f, g \in L^2$ telles que

$$f * g = 0.$$