ENS de Lyon — 2nd semestre 2018-2019

L3 - Intégration et Probabilités

TD 9

Transformée de Fourier.

Exercice 1 *Premiers exemples de transformées de Fourier*

1. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$$f = \mathbf{1}_{[a,b]} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto e^{-cx}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

   où les réels a, b et c vérifient $a < b$ et $c > 0$.

2. Déduire de ces calculs les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

3. En considérant cette fois-ci la fonction $\tilde{g}(x) = e^{-c|x|}$, calculer la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 2 *Application de la formule sommatoire de Poisson*

Pour $x > 0$, montrer l'égalité suivante,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|x} = \frac{\pi}{x} \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}},$$

et en déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.

Exercice 3 *Espace de Schwartz*

L'espace de Schwartz en dimension d est défini par

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \text{ multi-indice}, |x|^k D_\alpha f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\},$$

où $D_\alpha f$ désigne la dérivée partielle de f par rapport au multi-indice α. Montrer que l'espace de Schwartz est stable par la transformée de Fourier, au sens où

$$\hat{\mathcal{S}} := \{\hat{f}, f \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{S}.$$

Puis, montrer que $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

Exercice 4 *Équation de Laplace*

1. Trouver une solution bornée de l'équation suivante sur $\{y \geq 0\}$ (vous pouvez supposer toute la régularité nécessaire sur h) :

$$\begin{cases} \Delta f = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0 \\ f(x,0) = h(x). \end{cases}$$

2. Quelle situation physique cette equation modélise-elle ?
3. Remplaçer la condition au bord de Dirichlet par celle de Neumann $\{\partial_y u(x,0) = h(x)\}$. Quelle condition sur h apparaît ? Donner une solution.

Exercice 5 *Voisinage de zéro*

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) > 0$. On désigne par $A - A$ l'ensemble $\{x - y \mid x, y \in A\}$. Montrer que $A - A$ contient un voisinage de 0 en utilisant l'uniforme continuité de l'opérateur de translation en 0.

Exercice 6 *Algèbres associatives unifères ?*

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre pour la convolution. Il en est de même pour l'espace des mesures signées. Ces algèbres sont-elles associatives ? Admettent-elles une unité ?

Exercice 7 *Transformée de Fourier d'une fonction radiale*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction radiale, au sens où il existe une fonction mesurable g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = g(|x|),$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de x. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également radiale.