ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2019-2020

L3 - Intégration et Probabilités

DM 1

1. Somme gaussienne

Le but est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Si $X+Y$ suit une loi normale, alors X et Y suivent des lois normales.*

On utilisera pour cela les deux résultats d'analyse complexe suivants. Le premier est à admettre, le second à démontrer.

Proposition 2 (admise)**.** *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière qui ne s'annule pas. Alors il existe une fonction entière $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}, f(z) = \exp(g(z))$.*

Théorème 3. *Soit f une fonction entière et $A, B \geq 0, k \geq 1$ tels que $|\mathrm{Re}(f(z))| \leq A + B|z|^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors f est un polynôme de degré au plus k.*

Indication : On pourra commencer par rappeler la fonction caractéristique d'une gaussienne et expliquer pourquoi elle est définie sur tout $\mathbb{C}$. Ensuite on pourra montrer que φ_X est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier (et ne croît pas trop vite), en passant par l'inégalité

$$\forall\, t \geq 0, \quad \mathbb{E}[e^{t|X|}] \leq 2e^{-tu}\mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] + 2e^{tu}\mathbb{E}[e^{-t(X+Y)}].$$

où u est tel que $\mathbb{P}(Y \geq u) = \mathbb{P}(Y \leq u) = 1/2$.

Pour le théorème 3 : que vaut $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$ pour $n \in \mathbb{Z}$?

2. Graphe aléatoire

Un graphe (V, E) est la donnée d'un ensemble fini V et d'un ensemble d'arêtes $E \subset \binom{V}{2}$, où $\binom{V}{2} = \{\{i,j\}, i \neq j \in V\}$. Soit $n \geq 1$ et $p \in [0,1]$. On construit le graphe aléatoire $G(n,p) = ([n], E_n)$ ainsi : son ensemble de sommets est $[n] = \{1, \ldots, n\}$, et son ensemble d'arêtes est $E_n = \{\{i,j\}, 1 \leq i < j \leq n, X_{i,j} = 1\}$, où $(X_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est un tableau triangulaire i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre p. Démontrer les propositions 4,6 et le théorème 7 ci-dessous.

Proposition 4. *Soit $\mathcal{P}$ une propriété de graphe croissante, c'est-à-dire pour tout V fini, $E, E' \in \binom{V}{2}$, si $E \subset E'$ et (V,E) vérifie $\mathcal{P}$ alors (V,E') vérifie $\mathcal{P}$. Alors $p \mapsto \mathbb{P}(G(n,p)$ vérifie $\mathcal{P})$ est une fonction croissante.*

Proposition 5 (Inégalités de Bonferroni, admises)**.** *Soit $E_1, \ldots E_n$ des événements. Pour $j \geq 1$ on a*

$$\sum_{k=1}^{2j}(-1)^{k-1}F_k \leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \leq \sum_{k=1}^{2j+1}(-1)^{k-1}F_k, \qquad \text{où } F_k = \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I| = k}} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i \in I} E_i\right].$$

Proposition 6. *Soit $c \in \mathbb{R}$ et $p_n = \log n/n + c/n$. Alors $\mathbb{P}(G(n,p_n)$ n'a pas de sommets isolés$)$ converge vers $e^{-e^{-c}}$.*

Théorème 7. *On a*

$$\mathbb{P}(G(n,p_n) \text{ connexe}) \to \begin{cases} 1 & \text{si } np_n - \log n \to +\infty \\ 0 & \text{si } np_n - \log n \to -\infty \end{cases}$$

Indication : On pourra d'une part réutiliser la proposition précédente, et d'autre part considérer l'espérance du nombre de coupes de $G(n,p_n)$ en deux parties non reliées $\mathbb{E}\big[\#\{K \subset [n], |K| \leq n/2, K \not\leftrightarrow [n] \setminus K \text{ dans } G(n,p_n)\}\big]$.