ENS de Lyon $\hfill$ 2$^{\text{nd}}$ semestre 2019-2020
L3 - Intégration et Probabilités

TD 2

Variables aléatoires, lois, espérance.

Exercice 1 *Votre premier couplage*

Soit $p \in [0, 1]$. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p définies sur le même espace probabilisé. Que peut être la loi de la variable aléatoire $Z := \max(X, Y)$?

Exercice 2 *Calcul de lois*

1. On suppose que la loi de (X, Y) est $\mathcal{E}xp(\frac{1}{2}) \otimes \mathcal{U}([0, 2\pi])$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.
2. On suppose que la loi de X est $\mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la loi de $-\log(U)$.
3. *(Transformée de Box-Muller)* Déduire un moyen de fabriquer une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes 2}$ en partant d'une paire $(U, V) \sim \mathcal{U}([0, 1])^{\otimes 2}$.
4. *(Loi de Cauchy)* On suppose que la loi de (X, Y) est $\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes 2}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Exercice 3 *Lois de variables aléatoires*

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que la loi de (X, Y) est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
2. Si X et Y sont à densité, est-ce que (X, Y) est à densité ?
3. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
4. On suppose que X et Y ont même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement même loi.

Exercice 4 *Méthode du premier moment*

1. Montrer que dans tout graphe G ayant au moins r sommets il existe un sous-graphe H qui soit r-parti, avec $\#E(H) \geq \frac{r-1}{r}\#E(G)$.
2. *(Plus longue sous-suite croissante)* Pour $n \geq 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose
$$L(\sigma) = \sup_{I \subset [n], \sigma|_I \text{ croissante}} \#I$$
   Soit σ_n un élément uniforme de $\mathfrak{S}_n$. Montrer qu'il existe c tel que $\mathbb{P}(L(\sigma_n) > c\sqrt{n}) \to 0$, et que $\limsup \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[L(\sigma_n)] \leq c$.

Exercice 5 *Des probabilités à l'espérance*

Soit X une variable aléatoire positive. Soit $p > 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}[X > x] dx.$$
Quel est le lien entre $X \in L^p$ et $\mathbb{P}(|X| > x) = o(x^r)$?

Exercice 6 *Projection L^2*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On munit l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles de carré intégrable (définies sur cet espace) du produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto \mathbb{E}[XY].$$

Enfin, on considère le sous-espace vectoriel des variables aléatoires constantes. Quelle est la projection orthogonale de X sur cet espace ? Sa distance à cet espace ?

Exercice 7 *Médianes, projection L^1, et variance*

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est une médiane de X si l'on a $\mathbb{P}(X < m) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(X \leq m)$.

1. Montrer que l'ensemble des médianes de X forme un intervalle compact non vide.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[|X - a|] = \int (\mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{1}_{x \leq a} + \mathbb{P}(X > x)\mathbb{1}_{x > a})\, dx.$$

3. On suppose maintenant X intégrable. Déduire de la question précédente que les médianes de X sont exactement les minimiseurs de $a \mapsto \mathbb{E}[|X - a|]$.
4. Montrer que pour toute médiane m de X, on a

$$|\mathbb{E}[X] - m| \leq \sqrt{\mathrm{Var} X}.$$

Exercice 8 *Méthode de Marsiglia et méthode du rejet*

Pour simuler des gaussiennes, une version un peu différente de la transformée de Box-Muller est généralement utilisée par nos ordinateurs : voici par exemple le code (C) que numpy utilise. Montrer qu'il fonctionne (en particulier, quelle est la loi de (`x1`, `x2`) à la sortie de la boucle ?).

```
double gauss()
{
double f, x1, x2, r2;

do {
x1 = 2.0*uniform() - 1.0;
x2 = 2.0*uniform() - 1.0;
r2 = x1*x1 + x2*x2;
}
while (r2 >= 1.0 || r2 == 0.0);

f = sqrt(-2.0*log(r2)/r2);
return f*x_1;
}
```