Corrigé du Devoir Maison 1

Exercice 1. (Une topologie Exotique sur $\mathbb{Z}$)

1^{ere} **Partie :**

1. Soit $x \in E$. Si $\rho = 0$, rien à démontrer. Soit $\rho > 0$ et $a \in B(x, \rho)$. Si $d(x, y) < \rho$, $d(a, y) \leq \max(d(a, x), d(x, y)) < \rho$. Si $d(a, y) < \rho$, $d(x, y) \leq \max(d(a, x), d(a, y) < \rho)$. Par double inclusion l'égalité est prouvée. Même raisonnement pour les boules fermées avec des inégalités larges, ça fonctionne alors aussi quand $\rho = 0$.
   Si deux boules s'intersectent, disons en $u \in E$ alors elles s'écrivent comme deux boules de même centre u. Donc l'une est incluse dans l'autre (celle qui a le plus petit rayon, et en cas d'égalité celle qui est ouverte).
2. Soit une boule fermée de rayon strictement positif $BF(x, \rho)$. Tout point de la boule en est le centre, d'où on déduit que $\forall a \in BF(x, \rho), a \in B(a, \rho) \subset BF(a, \rho) = BF(x, \rho)$. D'où l'ouverture.
   Soit une boule ouverte $B(x, \rho)$. Si $\rho = 0$ elle est vide donc trivialement fermée. Si $\rho > 0$, soit $a \in B(x, \rho)^{\complement}$, alors montrons que $B(a, \rho) \subset B(x, \rho)^{\complement}$. Par contraposée, si $y \in B(x, \rho), \rho \leq d(a, x) \leq \max(d(a, y), d(y, x)) \leq \max(d(a, y), \rho)$, d'où $d(a, y) \geq \rho$.

2^{eme} **Partie**

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a que $||x|| = 0$ si et seulement si tous les entiers divisent x, si et seulement si $x = 0$. D'où l'axiome de séparation pour d.
   Posons $h(x) = ||x||^{-1}$. Montrons que $h(x + y) \geq \min(h(x) + h(y))$. Tout entier entre 1 et $\min(h(x), h(y))$ divise à la fois x et y, par définition, donc divise $x + y$, prouvant l'inégalité. Passer aux inverses montre que d vérifie la condition d'ultramétricité, qui est plus forte que l'inégalité triangulaire. Donc d est bien une distance ultramétrique.
   Enfin, $d(n!, 0) = \|n!\| \leq 1/n$ donc $n!$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.
2. Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$. $d(x + y, x' + y') = \|x - x' + y - y'\| \leq max(\|x - x'\|, \|y - y'\|) = d_{\mathbb{Z}^2}((x, y), (x', y')$. Ainsi l'application $+$ est 1-Lipschitzienne donc continue.
   Pour la multiplication on commence par prouver l'inégalité suivante :
   $$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \|ab\| \leq \min(\|a\|, \|b\|), \tag{1}$$
   qui est équivalent à $h(ab) \geq \max(h(a), h(b))$. Mais tous les entiers de 1 à $\max(h(a), h(b))$ divisent chacun soit a soit b donc divisent tous ab, d'où l'inégalité.
   Maintenant, $d(xy, x'y') = \|xy - x'y'\| = \|xy - x'y'\| = \|(x - x')(y - y') + y(x' - x) + x(y' - y)\| \leq \max(\|(x - x')(y - y')\|, \|y(x - x')\|, \|x(y - y')\|)$. Par l'inégalité (1), chaque terme du max est majoré par $\max(\|(x - x')\|, \|(y - y')\|)$, d'où la 1-Lipschitzianité de $\times$.
3. Soit $x \in a + b\mathbb{Z}$, b étant non nul. Pour y dans $B(x, \frac{1}{b})$, on a $\|y - x\| > 1/b$, d'où en particulier b divise $y - x$. Par ailleurs b divise $x - a$ donc $y \in a + b\mathbb{Z}$. D'où l'inclusion $B(x, \frac{1}{b}) \subset a + b\mathbb{Z}$

et donc l'ouverture.
Pour la fermeture, il suffit de voir que $(a+b\mathbb{Z})^{\complement} = \bigcup_{0\leq c\leq p-1, c\not\equiv a[p]} c+b\mathbb{Z}$. Donc le $a+b\mathbb{Z}$ est fermé comme complémentaire d'une union d'ouverts.

4. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$. Si on prend $b \in \mathbb{Z}$ avec $||b|| < r$ (ça existe, voir question 1), soit $k \in \mathbb{Z}$. $d(a+bk, a) = \|bk\| \leq \|b\| < r$ par (1). On a bien montré que $a+b\mathbb{Z} \subset B(a,r)$.
Par la propriété d'ultramétricité, pour $x \in \mathbb{Z}$, on a $B(x,r) = \bigcup_{a\in B(x,r)} B(a,r) \supset \bigcup_{a\in B(x,r)}(a+b\mathbb{Z})$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on a montré que toute boule ouverte est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Comme les éléments de $\mathcal{B}$ sont eux-même des ouverts, alors $\mathcal{B}$ est une base de l'espace métrique (E,d).

5. On a $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \{-1,1\}$. Cet ensemble n'est pas fermé puisque $\{-1,1\}$ ne peut contenir un ensemble de $\mathcal{B}$. Donc l'union de fermés $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} p\mathbb{Z}$ n'est pas fermée, donc l'ensemble des nombres premiers est infini.

6. Par ailleurs la question 4 de l'exercice 15 du TD 1 dit que dans tout espace métrique E, si on a deux fermés disjoints F et G, il existe une fonction $f : E \to [0,1]$ continue telle que $f^{-1}(0) = F$ et $f^{-1}(1) = G$. De ça on déduit qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $F \subset U$ et $G \subset V$, en prenant $U = f^{-1}([0,1/2[)$ et $V = f^{-1}(]1/2,1])$. On a montré que tout espace métrique est *normal*.
On montre maintenant que P et Q sont fermés dans l'espace métrique induit $\mathbb{Z}_{\geq 2}$. On peut écrire
$$P = \mathbb{Z}_{\geq 2} \cap \bigcap_{n\geq 2, n\notin P} (\mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}).$$
Ainsi P est l'intersection de $\mathbb{Z}_{\geq 2}$ avec un fermé de $\mathbb{Z}$, c'est donc un fermé de la topologie induite. Idem pour Q.
La propriété de normalité implique qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de $\mathbb{Z}_{\geq 2}$, tels que $P \subset U$ et $Q \subset V$ On écrit $U = \mathbb{Z}_{\geq 2} \cap U'$ et $V = \mathbb{Z}_{\geq 2} \cap V'$.
Maintenant pour $p \in P$ on a $p \in U$ ouvert de $\mathbb{Z}$, et comme $\mathcal{B}$ est base d'ouverts de $\mathbb{Z}$, on peut trouver un élément de $\mathcal{B}$ contenant p inclus dans U'. Cet élément peut s'écrire $p + a_p\mathbb{Z} \subset U'$ avec a_p dans $\mathbb{N}^*$. On construit les $(b_q)_{q\in Q}$ de la même façon. On pose alors $A = \bigcup_{p\in P}(p + a_p\mathbb{Z}) \subset U'$ et $B = \bigcup_{q\in Q}(q + a_q\mathbb{Z}) \subset V'$.
Il reste maintenant à montrer que A et B sont disjoints. Vu que U et V sont disjoints, on a $A \cap B \cap Z_{\geq 2} = \emptyset$. Si on a $x \in A \cap B$, alors $x = p + a_pk = q + b_ql$ pour un certain $p \in P$, $q \in Q$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p + a_p(k + nb_q) = q + b_q(l + na_p)$. Avec n assez grand on fabrique un nombre dans $A \cap B \cap Z_{\geq 2} = \emptyset$, ce qui est absurde. Donc A et B sont disjoints, terminant l'exercice.

Certains d'entre vous ont trouvé une méthode un peu plus simple pour la dernière question, qui consiste à montrer que P et Q sont fermés dans $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$, qui est ouvert. Alors les ouverts disjoints U et V de $\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$ obtenus par normalité $\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$ sont aussi ouverts de $\mathbb{Z}$, ce qui permet de terminer plus rapidement. Notez que la question de savoir si P est fermé dans $\mathbb{Z}$ tout entier semble difficile. En effet à l'heure actuelle on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $n! + 1$.

Exercice 2 (Cube de Hilbert). 1. Distance d : On vérifie aisément que d vérifie bien les propriétés d'une distance et cela vient des propriété de la valeur absolue.

2. Continuité de $p_{n_0} : (C,d) \to (\mathbb{R}, |.|)$
On montre immédiatement que p_{n_0} est 2^{n_0}-Lipschitzienne donc continue.

3. Si f est continue alors $p_{n_0} \circ f$ est continue puisqu'étant la composition de deux fonctions continues.

   Dans l'autre sens, si toutes les $p_n \circ f$ sont continues alors on montre la continuité de f comme suit : soit $x, y \in E$. Alors $d(f(x), f(y)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|p_n \circ f(x) - p_n \circ f(y)|$. On commence par scinder cette série en deux blocs $\sum_{n=0}^{k} 2^{-n}|p_n \circ f(x) - p_n \circ f(y)|$ et $\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}|p_n \circ f(x) - p_n \circ f(y)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} = R(k)$. Pour $\varepsilon > 0$ on choisit k tel que $R(k) < \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est possible car c'est le reste d'une série convergente.

   Ensuite, on fixe x et trouve $\eta > 0$ tel que pour $d_E(x, y) < \eta$ la première somme finie soit bornée par $\frac{\varepsilon}{2}$; ceci est possible puisque les $p_n \circ f$ sont continues en x. Alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

4. L'inclusion de H dans $l^2(\mathbb{N})$ et dans $l^\infty(\mathbb{N})$ est immédiate, vu que $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et de carré sommable. Pour l'équivalence des topologies, raisonnons en termes de bases de voisinages. Montrons que dans une boule quelconque pour $\|\cdot\|_\infty$ on peut inclure une $\|\cdot\|_2$-boule non vide de même centre, et vice-versa. Ainsi un $\|\cdot\|_\infty$-ouvert, qui est un $\|\cdot\|_\infty$-voisinage de chacun de ses points, est aussi un $\|\cdot\|_2$-voisinage de chacun de ses points, donc $\|\cdot\|_2$-ouvert. *Remarque :* cela revient à montrer que l'application identité $(H, \|\cdot\|_2) \to (H, \|\cdot\|_\infty)$ est un homéomorphisme par la caractérisation $\varepsilon - \eta$.

   Soit donc $x, \rho \in (H, \mathbb{R}_+^*)$. La propriété $d_\infty \leq d_2$ est immédiate, ce qui implique $B_2(x, \rho) \subset B_\infty(x, \rho)$. Pour l'autre sens soit $k \geq 0$ tel que $\sum_{n=k}^{\infty} n^{-2} \leq \rho^2/2$. Alors pour $y \in B_\infty(x, \rho/\sqrt{2k})$, on a $d_2(x, y)^2 \leq k(\rho/\sqrt{2k})^2 + \rho^2/2 \leq \rho^2$, d'où $B_\infty(x, \rho/\sqrt{2k}) \subset B_2(x, \rho)$, terminant l'argument.

5. On vérifie aisément que $\psi(x) = (x_0, x_1/2, x_2/3, \ldots)$ fournit bien une réciproque à ϕ.

   Pour la continuité de ϕ par la question 3 il suffit de vérifier que pour tout n, $p_n \circ \phi$ est continue $(H, d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Or cette dernière application est immédiatement $(n+1)$-Lipschitzienne.

   Pour la continuité de ψ on procède ainsi : soient $x, y \in C$. On a
$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty = \sup_{n\geq 0} \frac{|p_n(x) - p_n(y)|}{n+1}.$$
   Soit alors $\varepsilon > 0$ et $N > 1/\varepsilon$. Alors pour $n \geq N$, $\frac{|p_n(x)-p_n(y)|}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$, d'où
$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty \leq \max\left(\varepsilon, \sup_{n=0}^{N-1} \frac{|p_n(x) - p_n(y)|}{n+1}\right).$$
   Soit maintenant $\eta = \varepsilon/2^N$. Alors pour $d_C(x, y) < \eta$ et $n \in [\![0, N-1]\!]$ on a $|p_n(x) - p_n(y)| \leq \varepsilon$ par 2^n-(et donc 2^N-)Lipschitzianité des p_n. Alors $\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty \leq \varepsilon$, prouvant la continuité uniforme de ψ.