
DM 2 : Calcul différentiel (version 3 : typos corrigées et hypothèse modifiée dans l'exercice 1)

A rendre pour le vendredi 22 décembre dernier délai. La clarté de la rédaction, la concision des arguments et la propreté de la présentation seront appréciées.

Exercice 1. *Descente de gradient*
Soit H un espace euclidien **de dimension finie** et $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $0 < c < C$ tels que $c\|h\|^2 \leq D^2 f(x)(h,h) \leq C\|h\|^2$ pour tous $x \in H, h \in H$.

1. Montrer que f est convexe, c'est à dire $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$ pour tous $x, y \in H$ et $t \in [0,1]$. Montrer qu'elle admet un unique minimum local $x^\star$ qui est aussi global, et que son gradient $\nabla f : H \to H$ est C-lipschitzien (le gradient est défini dans l'exercice 7 de la feuille de TD 8).
2. Montrer que pour $x, y \in H$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq c\|x-y\|^2$.
3. Soit α positif et $x_0 \in H$. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence vers $x^\star$ du procédé de descente de gradient $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$? Quel α garantit-il la meilleure convergence ?

Exercice 2. *Composition*
Soit E l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit F le sous-espace de E formé par les fonctions deux fois dérivables à dérivée et dérivée seconde bornées, muni de $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$.

1. En utilisant un théorème du cours, justifier rapidement la complétude de F.
2. Pour $f \in F$ fixée, montrer que $\phi : F \to E, \phi(g) = g \circ f$ est $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer sa différentielle.
3. Pour $g \in F$ fixée, montrer que $\psi : F \to E, \psi(f) = g \circ f$ est différentiable et exprimer sa différentielle. (On pourra utiliser une formule de Taylor-Lagrange)
4. Montrer que $\theta : F \times F \to E, \theta(g, f) = g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa différentielle.

Exercice 3. *Lois de groupe sur* $\mathbb{R}$
On suppose que $\star$ est une loi de groupe sur $\mathbb{R}$. On note e son neutre. On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \star y$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x \star y, e) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x_2}(y,e)$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_2}(e,e)$. En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x_2}(y,e) \neq 0$ et trouver une expression pour son inverse.
3. Dans cette question on suppose qu'il existe un $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, avec $\phi(x \star y) = \phi(x) + \phi(y)$. Exprimer alors la dérivée de ϕ en utilisant $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.
4. Montrer qu'il existe effectivement un tel ϕ qui soit également un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
5. On définit la loi suivante sur $\mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + e^{x_1} y_2)$. Montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$ mais qu'il n'existe pas de difféomorphisme qui l'envoie sur $+$.

Exercice 4. *Isométries*

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ où Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. On emploie la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$, et on suppose que f est deux fois différentiable.

1. On suppose que f est une isométrie, c'est à dire $\|f(x) - f(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ pour tous $x, y \in \Omega$. Montrer qu'alors Df est à image dans $O(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire $\|Df(x).h\|_2 = \|h\|_2$ pour tout $x \in \Omega, h \in \mathbb{R}^n$.
2. Réciproquement on suppose que Df est à image dans les applications orthogonales.
   (a) Dans le cas $n = 1$, montrer que f est affine. A-t-on utilisé toutes les hypothèses sur la régularité de f ?
   (b) Dans le cas général, montrer que f est affine. On pourra utiliser le fait que $Df(x)$ préserve le produit scalaire, pour étudier le comportement de $T(h, k, l) = \langle Df(x).h, D^2 f(x).(k, l)\rangle$ par permutation circulaire de ses arguments.
3. Soit $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le laplacien. Montrer que f est une isométrie si et seulement si pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $\Delta(u \circ f) = \Delta(u) \circ f$.