
TD 1 : Topologie des espaces métriques

Exercice 1. Soient $N_1(x_1, \ldots, x_n) = |x_1| + \ldots + |x_n|$, $N_2(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$, $N_\infty(x_1, \ldots, x_N) = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ des fonctions de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $d_j(x, y) = N_j(x - y)$ est une distance pour $j = 1, 2, \infty$.

b. Décrire les boules ouvertes pour ces métriques.

c. Montrer que $N_\infty \leq N_1 \leq nN_\infty$ ainsi que $N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n}N_\infty$, et déduire que les métriques d_1, d_2, d_∞ définissent la même topologie.

d. Soit $l^1(\mathbb{N}), l^2(\mathbb{N})$ et $l^\infty(\mathbb{N})$ les espaces des suites :

$$l^1(\mathbb{N}) = \left\{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots,) \mid ||\mathbf{x}||_1 := \sum_j |x_j| < \infty \right\},$$

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots,) \mid ||\mathbf{x}||_2 := \sqrt{\sum_j |x_j|^2} < \infty \right\},$$

$$l^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots,) \mid ||\mathbf{x}||_\infty := \sup_j |x_j| < \infty \right\}.$$

Prouver que $\left(l^j(\mathbb{N}), ||\cdot||_j\right), j = 1, 2, \infty$ sont des espaces vectoriels normés.

e. Montrer que pour l'espace $(l^\infty(\mathbb{N}, ||\cdot||_\infty)$ et pour deux sous-ensembles différents $A, B \subset \mathbb{N}$, on a $B(\chi_A, \frac{1}{2}) \cap B(\chi_B, \frac{1}{2}) = \emptyset$.

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique, et $d'(x, y) = \min(\alpha, d(x, y))$, pour $\alpha > 0$. Montrer que les métriques d et d' donnent la même topologie.

Exercice 3 (Métrique SNCF). On note d la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$. Pour x, y les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ nous définissons $d'(x, y) = d(x, y)$ si x, y sont colinéaires et $d'(x, y) = d(x, 0) + d(0, y)$ sinon.

a. Montrer que d' définit une métrique

b. Décrire les boules ouvertes de $(\mathbb{R}^2, d')$.

c. Quelles sont l'adhérence du haut demi-plan $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$ et l'intérieur de l'axe des ordonnées Y ?

d. En quels points de $\mathbb{R}^2$ la rotation de centre 0 et les translations sont-elles continues ?

Exercice 4. (Topologie de l'ordre lexicographique) Introduisons la relation d'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \leq (x_0, y_0)$ si soit $x < x_0$ soit $x = x_0$ et $y \leq y_0$.

a. Montrer que c'est une relation d'ordre total.

b. Dessiner les intervalles ouverts $](0, 1), (1, 0)[$ et $](0, 1), (0, 2)[$.

c. Montrer qu'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est une union d'intervalles ouverts si et seulement si son intersection avec chaque verticale est un ouvert de $\mathbb{R}$ (dans la topologie standard).

d. Est-ce qu'il existe une métrique sur $\mathbb{R}^2$ dont les ouverts sont les unions des intervalles ouverts pour cette relation d'ordre ?

e. En quels points de $\mathbb{R}^2$ les rotation et les translations sont-elles continues ?

f. Montrer que les droites verticales sont à la fois ouvertes et fermées pour cette topologie.

g. (**) Si au lieu de $\mathbb{R}^2$ on considere $[0,1]^2$, est-ce qu'il existe une métrique correspondant à cette relation d'ordre ?

Exercice 5. On rappelle les propriétés suivantes de l'adhérence et de l'intérieur

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}, \qquad \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$$

a. donner des exemples dans $\mathbb{R}$ justifiant que les inclusions sont strictes.

b. qu'en serait-il pour des unions ou des intersections infinies ?

Exercice 6. Prenons un sous-ensemble A d'un espace topologique. Combien au maximum d'ensembles différents on peut obtenir à partir de A en utilisant :

a. les opérations $\mathring{\cdot}$ et $\bar{\cdot}$ d'interieur et d'adhérence ?

b. et si on ajoute l'opération $fr\ \cdot$ de frontière ?

Exercice 7. Montrer que dans le monde des espaces métriques, l'adhérence de $B(x,\rho)$ peut être différente de $BF(x,\rho)$. Qu'en est-il dans le monde des espaces vectoriels normés ?

Exercice 8. Montrer que dans tout espace métrique les boules fermées sont fermées.

Exercice 9. Soit E un espace topologique de cardinal infini. On suppose que tout ensemble de cardinal infini de E est un ouvert. Montrer que toute partie de E est un ouvert (c'est la topologie discrète).

Exercice 10. Montrer que si $f : (E,d) \to (F,\delta)$ est l'application continue entre deux espaces métriques, alors le graphe de f est fermé dans $E \times F$ pour la métrique produit. Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 11. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$d(f,g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} \min\left(1, \sup_{x\in[0,1]} \left| f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x) \right| \right).$$

a. Montrer qu'il s'agit d'une distance.

b. Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$, si et seulement si pour chaque $k \geq 0$, $f_n^{(k)}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$.

Exercice 12. On munit $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ de $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|$.

1. Montrer que d est une distance sur C.
2. On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $p_{n_0} : (C,d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $p_{n_0}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_{n_0}$ est continue.

3. Soit (E,d) un espace métrique et $f : E \to C$. Montrer que f est continue si et seulement si $p_n \circ f$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On note $\Omega = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \{0,1\}\}$. Montrer que Ω est fermé dans C.

Exercice 13. a. Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. En quels points est-elle continue ?

b. (**) Est-ce qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont les points de continuité sont exactement les nombres rationnels ?

Exercice 14. Soient (E,d) et (F,δ) des espaces métriques, ainsi que $f : E \to F$ une application continue.

1. Soit $A \subset E$. Si A est ouvert, $f(A)$ est-il ouvert ? Si A est fermé, $f(A)$ est-il fermé ?
2. Soit $B \subset F$. Montrer que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$. Que dire de l'inclusion réciproque ?
3. Soit $B \subset F$. Montrer que $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$. Que dire de l'inclusion réciproque ?

Exercice 15. Soit (E,d) un espace métrique, et F une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose $d_F(x) = \inf_{y\in F} d(x,y)$.

1. Montrer que $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{F}$.
2. Montrer que d_F est une fonction 1-Lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que tout fermé de E est l'ensemble des zéros d'un fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$.
4. Lemme d'Urysohn : soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to [0,1]$ telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.
5. Soit $A \subset E$ un fermé. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in E$:
   — $x \in A \iff f(x) \geq 0$
   — $x \in \partial A \iff f(x) = 0$.
6. (**) Un espace topologique séparé est dit *normal* s'il possède en plus la propriété de séparation des fermés disjoints : si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 contenant respectivement F_1 et F_2. Prouver les théorèmes suivants.

   Théorème (Urysohn)**.** *Un espace topologique séparé E est normal si et seulement si pour toute paire de fermés disjoints F_1 et F_2, on peut trouver une fonction continue f de X dans $[0,1]$ valant 0 sur F_1 et 1 sur F_2.*

   Théorème (Tietze - Urysohn)**.** *Un espace topologique séparé E est normal si et seulement si toute fonction définie sur un fermé A de E, continue pour la topologie induite sur A, et à valeurs dans $[0,1]$ peut être prolongée à E tout entier.*