TD 10 : Formule de Taylor v2

Merci à Léo Poyeton pour sa relecture attentive !

Exercice 1. *(Diagonalisation simultanée - corrigé)*

1. La continuité est immédiate et l'existence d'un maximum est garantie par le fait que la sphère unité (fermé borné) est compacte en dimension finie.
2. La fonction f est constante sur les demi-droites : $f(\lambda x) = f(x)$ pour $\lambda > 0$. Donc pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $f(e_1) \geq f(x/\|x\|) = f(x)$. D'où la maximalité.
3. On calcule pour x, h quelconques
$$Df(x).h = 2\langle A.x, h\rangle \frac{1}{\|x\|^2} - \langle x, A.x\rangle \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}$$
(on a utilisé la symétrie de A). En testant en e_1 on obtient $Df(e_1).h = 2\langle A.e_1, h\rangle - 2\langle Ae_1, e_1\rangle\langle e_1, h\rangle$.
4. La différentielle s'annulant en un minimum, on obtient $\langle A.e_1, h\rangle = \langle Ae_1, e_1\rangle\langle e_1, h\rangle$. On déduit que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\langle e_1, h\rangle = 0$, on a $\langle Ae_1, h\rangle = 0$. Ceci implique que e_1 est un vecteur propre de valeur propre $\langle Ae_1, e_1\rangle$, et que pour $h \in e_1^\perp$, $A.h \in e_1^\perp$.
5. Par la A-stabilité de $e_1^\perp$, on peut recommencer par induction sur ce sous-espace. Noter qu'on obtient alors les valeurs propres dans l'ordre.

Exercice 2. *(Inégalité de Glaeser - corrigé)*

Soit $x, h \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à f entre x et $x + th$. On obtient
$$\Big| f(x+th) - \Big(f(x) + tDf(x).h\Big)\Big| \leq M\frac{t^2\|h\|^2}{2}.$$
De là on déduit
$$f(x) + tDf(x).h - f(x+th) \geq -M\frac{t^2\|h\|}{2}\|h\|^2.$$
et donc
$$f(x) + tDf(x).h + t^2\frac{M\|h\|^2}{2} \geq f(x+th) \geq 0.$$
Comme t est arbitraire on a un polynôme de degré 2 qui reste positif. Son discriminant est donc négatif :
$$(Df(x).h)^2 \leq 4f(x)\frac{M\|h\|^2}{2}.$$
On en déduit $|Df(x).h| \leq \sqrt{2Mf(x)}\|h\|$ en passant à la racine.

Exercice 3. *(Exercice du cours - corrigé)*

1. Par multilinéarité, et en écrivant $h = \sum_i h_i e_i$, on obtient

$$D^p f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_p \le n} h_{i_1} \ldots h_{i_p} D^p f(a)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$$
$$= \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_p \le n} h_{i_1} \ldots h_{i_p} \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(a).$$

Pour chaque p-uple $i_1, \ldots i_p$ on peut lui associer $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $\alpha_j = \#\{k : i_k = i\}$. On a alors $|\alpha| = p$. Chaque α correspond à $\binom{p}{\alpha} = \binom{p}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{p!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} = \frac{p!}{\alpha!}$ p-uples. De plus par Schwartz (et la commutativité du produit), les termes correspondants dans la grosse somme sont identiques et valent tous $h^\alpha \partial^\alpha$ avec les notations choisies. On déduit alors, en regroupant, que

$$D^p f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\, |\alpha| = p} \frac{p!}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha f(a).$$

2. On obtient alors que le p-ième polynôme de Taylor est

$$\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{p!} D^p f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\, |\alpha| \le p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a).$$

où on a adopté la convention $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Notons que pour $n = 1$ on n'est pas dépaysé.

Exercice 4. *(Condition nécessaire d'analyticité - corrigé)*
Soit f une application C^∞ d'un intervalle ouvert I de centre x_0 dans un espace de Banach E. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent une majoration de la forme : $||f^{(2n)}(x)\| \le M(2n)!\, k^n$ où $M > 0$ et $k > 0$ sont des constantes indépendantes de n.

1. Soit 2ε la largeur de l'intervalle I. Pour $x \in I$, on peut trouver $y \in I$ à distance exactement $\varepsilon/2$ de x.Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a alors

$$|f^{(2n)}(y) - f^{(2n)}(x) - \frac{\varepsilon}{2} f^{(2n+1)}(x)| \le M \frac{\varepsilon^2}{8} (2n+2)! k^{n+2}.$$

On obtient alors en bidouillant

$$|f^{(2n+1)}(x)| \le \frac{2}{\varepsilon} |f^{(2n)}(y) - f^{(2n)}(x)| + \frac{\varepsilon}{4} (2n+2)! k^{n+2}.$$

et alors

$$|f^{(2n+1)}(x)| \le \frac{4M}{\varepsilon} (2n)! k^n + \frac{\varepsilon}{4} (2n+2)! k^{n+2} \le M'(2n+2)! k^{2n+1}$$

pour une nouvelle constante $M' = 1000M(\varepsilon + 1/\varepsilon)(k + k^{-1})$. Comme $M' > M$ on a alors pour tout n pair ou impair :

$$|f^{(2n+1)}(x)| \le M'(n+1)! k^n.$$

2. On applique encore Taylor-Lagrange pour montrer que pour $x \in I \cap B(x_0, 1/k)$, on a

$$|f(x) - \text{Taylor}_{n,x_0} f(x)| \le M'(k\|x - x_0\|)^{n+1} \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = o(1).$$

D'où la convergence. On a même convergence uniforme sur les compacts de $I \cap B(x_0, 1/k)$).

Exercice 5. *(Lemme d'Hadamard à l'ordre 2 - corrigé)*
On a par Taylor reste intégral,

$$F(x) = \int_0^1 dt \frac{(1-t)^2}{2!} D^2 f(tx).(x, \dots, x) = \int_0^1 dt \frac{(1-t)^2}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} f(tx) x_i x_j$$
$$= \sum_{i,j} \left(\int_0^1 dt \frac{(1-t)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} f(tx) \right) x_i x_j.$$

On voit alors quoi prendre pour les g_{ij}. La continuité des g_i est une simple continuité sous l'intégrale, version compacte (pas besoin du théorème de Lebesgue). La valeur en 0 est bien celle prescrite. Enfin par Schwartz, $g_{ij} = g_{ji}$.