École Normale Supérieure de Lyon **Année 2017–2018**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

Corrigé partiel TD 3 : Connexité, connexité par arcs, complétude

Exercice 1. (Les groupes linéaires)
On muni $M_n(\mathbb{C})$ de la norme suivante :

$$||(a_{ij})_{1<i,j<n}|| := \max\{|a_{ij}|\}$$

1. Soit A une partie dénombrable de $\mathbb{C}$ et $x \neq y \in \mathbb{C} \setminus A$. Considérons la famille de fonctions $[0,1] \to \mathbb{C}$ $(f_\alpha)_{-1\leq\alpha\leq 1}$ définie ainsi : $f_\alpha(t) = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}(\cos(t) + \alpha i \sin(t))$. Pour tout $\alpha \in [0,1]$, f_α est un chemin continu dans $\mathbb{C}$ qui joint x à y. Supposons que l'image de tous les f_α rencontre A. Remarquons que si $\alpha \neq \alpha'$ alors $f_\alpha([0,1]) \cap f_{\alpha'}([0,1]) = \{x,y\} \subset \mathbb{C} \setminus A$. Donc les points de A que f_α et $f_{\alpha'}$ rencontrent sont différents. Ceci permet de construire une injection $[-1,1] \to A$, ce qui est absurde par cardinal. Donc il existe un α tel que f_α soit un chemin à image dans $\mathbb{C} \setminus A$, prouvant la connexité par arcs.
2. Pour $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \det(zA + (1-z)B)$ est une fonction polynomiale. Donc elle possède un nombre fini de racines, dont 0 et 1 ne font pas partie, puisque A et B sont inversibles. D'après la question 1, il existe donc un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ tel que $\det(\gamma(t)A + (1-\gamma(t))B)$ ne s'annule pas. Donc $\phi(t) = \gamma(t)A + (1-\gamma(t))B$ fournit un chemin $[0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$, bien continu vu la métrique que l'on a mis sur $GL_n(\mathbb{C})$. Ceci prouve la connexité par arcs.
3. Le déterminant, fonction polynomiale en les coordonnées de la matrice, est continu. Pourtant l'image de $GL_n(\mathbb{R})$ par det est $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas connexe. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ ne peut être connexe. Montrons que $GL_n^+(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à déterminant positif, est connexe par arcs. Soit $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$. L'application astucieuse de l'algorithme du pivot de Gauss nous dit qu'il existe deux suites de matrices de transvections $T_1, \ldots, T_k$ et $T'_1, \ldots T'_l$ telles que $A = T_1 \cdots T_k D T'_1 \cdots T'_l$, avec $D = \mathrm{diag}(1, \ldots 1, \det A)$. Rappelons qu'une matrice de transvection est une matrice qui s'écrit $I_n + \lambda E_n^{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il est alors immédiat de construire un chemin continu entre A et I_n. D'où la connexité par arcs. De même dans $GL_n^-(\mathbb{R})$ où on peut construire des chemins continus vers $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$. Comme nous avons partitionné $GL_n(\mathbb{R})$ en deux ouverts connexes par arcs, il s'agit bien des composantes connexes.
4. On a que $SO_2(R)$ est connexe par arcs car c'est l'image de $\mathbb{R}$ par le morphisme continu qui à θ associe la rotation d'angle θ.

Exercice 2. Soit

$$E = \{(x, sin(\frac{1}{x}), x \in [0,1])$$

. Soit X l'adhérence de E dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle.

1. On a $E \subset [0,1] \times [-1,1]$ qui est fermé, donc $X = \bar{E} \subset [0,1] \times [-1,1]$. Soit $(x_n, f(x_n))_n$ une suite de E qui converge vers $(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$. On sait alors que $(y^1, y^2) \in [0,1] \times [-1,1]$. Si $y^1 > 0$, alors par continuité de $f : t \mapsto sin(1/t)$ en tout point de $(0,1]$, $y^2 = f(y^1)$ donc $(y^1, y^2) \in E$. Réciproquement, tout point de E est dans X, et un point $(0,a) \in \{0\} \times [-1,1]$ est également une limite de points de E : prendre la suite $x_n = 1/(2\pi(n+1000) + \arcsin(a))$. Par analyse-synthèse on a montré que $X = E \cup \{0\} \times [-1,1]$.

2. E est connexe car image du connexe $(0,1]$ par la fonction continue $t \mapsto (t, \sin(1/t))$, et X connexe par adhérence d'un connexe.

3. Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ un chemin continu entre un point d'abcisse 0 et un point d'abcisse 1, dans X. Par utilisation répétée du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à γ_1, on construit une suite décroissante $(t_k)_{k\geq 0}$ de $[0,1]$ telle que $\gamma_1(t_k) = 1/(\pi/2 + k\pi)$. Alors pour tout k, $(\gamma_1(t_k), \gamma_2(t_k)) \in X \cap (0,1] \times \mathbb{R} = E$. D'où $\gamma_2(t_k) = sin(1/\gamma(t_k)) = (-1)^k$ qui ne converge pas, pourtant t_k, suite décroissante et minorée dans $\mathbb{R}$, converge vers $x \geq 0$, et γ_2 est supposée continue. Absurde.

4. Supposons la connexité locale de X. Alors on a un voisinage connexe C de $(0,0)$ inclus dans $B_X((0,0), 1/2)$. Comme c'est un voisinage, il contient $B_X((0,0), \varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On définit, pour $k \geq 1$ les réels $x_k = 1/(k\pi/2)$, qui forment une suite décroissante. Alors il existe $k \geq 1$ tel que $x_{2k} < \varepsilon$. On pose alors $U = (]-\infty, x_{2k+1}[\times\mathbb{R}) \cap C$, $V = (]x_{2k+1}, \infty[\times\mathbb{R}) \cap C$, deux ouverts de C. Puisque $0 < x_{2k+2} < x_{2k+1} < x_{2k} < \varepsilon$, on a $(x_{2k+2}, 0) \in U$ et $(x_{2k}, 0) \in V$ donc nos deux ouverts sont non vides. Maintenant si $(x,y) \in C \setminus (U \cup V)$, alors $x = x_{2k+1}$ et donc $y = \pm 1$, contredisant $C \subset B_X(0, 1/2)$. Donc $C = U \cup V$, niant la connexité de C et donc la connexité locale de X.

Exercice 3. 1. Si $x, y \in U$ et $y \in \overline{x}$, alors par ouverture de U, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Et nous savons qu'il existe une ligne brisée $\gamma : [0,1] \to U$ reliant x à y. Alors pour tout $z \in B(x,\varepsilon)$, poser $\theta : [0,1] \to E$, avec $\theta(t) = \gamma(2t)$ pour $0 \leq t < 1/2$, et $\theta(t) = (2t-1)z + (2-2t)y$ pour $1/2 \leq t \leq 1$ fournit une ligne brisée continue, qui est bien à image dans U par convexité de $B(x,\varepsilon)$, et qui relie x à z. D'ou $B(y, \varepsilon) \subset \overline{x}$ et donc $\overline{x}$ est ouvert. Les classes d'équivalence forment une partition de $\mathbb{R}$ donc si toutes les classes d'équivalence sont ouvertes, elles sont également fermées (le complémentaire est l'union des autres).

2. Par connexité, une classe d'équivalence est soit vide (impossible) soit l'espace entier, donc U est connexe par lignes brisées, et à fortiori connexe par arcs.

Ici nous avons utilisé la convexité locale d'un evn. Le même argument montre que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel topologique localement connexe (resp. d'un espace topologique localement connexe par arcs) est connexe par lignes brisées (resp. par arcs).