École Normale Supérieure de Lyon **Année 2017–2018**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

TD 6 : Compacité relative, espace $\mathcal{C}^0$ (version 2)

Exercice 1. Généralités sur les compacts

1. Soit X un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Soient X et Y deux espaces métriques compacts, et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $g(x) = \inf_{y\in Y} f(x, y)$. Montrer que la fonction $g : X \to \mathbb{R}$ est continue.
3. On sait que tout espace métrique compact est précompact. Déduire qu'il est alors séparable.

Exercice 2. Graphe fermé dans un compact

1. Montrer que la projection $pr_1 : E \times F \to E$ est fermée quand F est compact (indication : soit A fermé dans $E \times F$ et $x \notin pr_1(A)$. Pour $y \in F$, il existe des ouverts $U_y \subset E$ et $V_y \subset F$ tels que $(x, y) \in U_y \times V_y \subset A^{\complement}$...).
2. Déduire que si F est compact et que le graphe de $f : E \to F$ est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

Exercice 3. Généralités sur la relative compacité

1. Montrer que dans l'espace normé de dimension finie le fait d'être relativement compact est équivalent au fait d'être borné.
2. Montrer que dans un espace métrique E une partie A est relativement compacte si et seulement si toute suite de A admet une sous-suite convergente dans E.

Exercice 4. Lesquels de ces ensembles sont relativement compacts dans $\mathcal{C}^0[0, 1]$?

1. $M_1 = \{t \mapsto t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$,
2. $M_2 = \{t \mapsto \sin(t + n)\}_{n\in\mathbb{N}}$
3. $M_3 = \left\{x : x(t) = \int_0^t y(s)ds, y \in C[0, 1], ||y||_{C[0,1]\leq 1}\right\}$,
4. Pour une fonction $f \in L^1[0, 1]$ considérons ses moments $p_n := \int_0^1 f(t)t^n dt, n = 0, 1, ...$ On pose
$$M_4 := \left\{f \in C[0, 1] : |p_n(f)| \leq \frac{1}{n}, n = 0, 1, \dots\right\}$$

Exercice 5. On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme sup. On considère une fonction continue $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. On définit l'opérateur $T : E \to E$ par $Tf(x) = \int_0^1 k(t, x)f(t)dt$.

1. Montrer que T est bien défini et continu
2. Montrer que $\overline{T(B_{\|.\|_\infty}(0, 1))}$ est une partie compacte de $(E, \|.\|_\infty)$ (indication : on pensera à utiliser l'uniforme continuité de k).

3. Soit $\lambda \neq 0$. Montrer que l'espace propre $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_E)$ est de dimension finie.

Exercice 6. (Relative compacité dans $\mathcal{C}^n[0,1]$)
Un critère pour être un ensemble d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^n[0,1]$ muni de $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\infty$, peut être obtenu du critère d'Arzela-Ascoli en utilisant l'application $\varphi = \frac{d^n}{dx^n} : \mathcal{C}^n[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$.

1. Montrer que φ est continue surjective, n'est pas un isomorphisme, et trouver son noyau Kerφ.
2. Prouver qu'une partie bornée de Kerφ est d'adhérence compacte.
3. Prouver que M est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^n[0,1], n \in \mathbb{N}$ si et seulement si M est borné et l'ensemble $M_n = \{x^{(n)} : x \in M\}$ est équicontinu.
4. Est-il vrai que M est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^n[0,1]$ si et seulement si M_n est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}[0,1]$?
5. Donner un exemple d'un ensemble M dans $\mathcal{C}^1[0,1]$ qui est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0[0,1]$ mais pas dans $\mathcal{C}^1[0,1]$.

Exercice 7. (Théorème de Cauchy-Peano)
Soit $F : [-r,r] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $M = \sup|f|$ et $T = r/M$. On veut montrer qu'il existe une fonction dérivable $y : [0,T] \to [-r,r]$ qui vérifie l'équation différentielle $y' = F(y)$ avec condition initiale $y(0) = 0$.

1. On fixe $n \geq 0$. Soit $(a_i^{(n)})_{0 \leq i \leq n}$ la solution du schéma d'Euler explicite associé à l'équation, pour le pas $h_n = T/n$:

$$a_0^{(n)} = 0 \quad ; \quad a_{i+1}^{(n)} = a_i^{(n)} + h_n F(a_i^{(n)}), 0 \leq i \leq n-1.$$

   Vérifier par récurrence sur i qu'il est bien défini (montrer l'inégalité $|a_i^{(n)}| \leq ri/n$).
2. Vérifier que la fonction affine par morceaux $y^{(n)} : [0,T] \to [-r,r]$ qui interpole $a^{(n)}$ telle que $y^{(n)}(h_n i) = a_i^{(n)}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, est M-Lipschitzienne.
3. Montrer que la suite $(y^{(n)})_{n \geq 0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0([0,T])$.
4. Soit ω le module d'uniforme continuité de F, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\omega(\varepsilon) = \inf_{d(x,y)<\varepsilon} d(F(x), F(y))$. L'uniforme continuité de F équivaut à $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$.
   Montrer que pour $0 \leq i \leq n$, on a $|y^{(n)}(h_n(i+1)) - y^{(n)}(h_n i) - \int_{h_n i}^{h_n(i+1)} F(y^{(n)}(s))ds| \leq h_n \omega(h_n M)$. En déduire qu'uniformément en i tel que $0 \leq i \leq n$, on a $|y^{(n)}(h_n i) - \int_0^{h_n i} F(y^{(n)}(s))ds| \leq T\omega(h_n M)$.
5. Conclure.