
TD 7 : Baire & Autres

Exercice 1.

1. Montrer qu'il n'existe pas d'espace métrique complet dénombrable, non vide et sans point isolé.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 2. Soit f une fonction numérique. On appelle *oscillation* de f en x le nombre

$$\omega(f,x) = \lim_{h\to 0} \sup\{|f(u) - f(v)|; |u-x| < h, |v-x| < h\}.$$

1. Montrer que $\omega(f,x)$ est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
2. Monter que f est continue en x si et seulement si $\omega(f,x) = 0$.
3. Notons D l'ensemble des points de discontinuité de f et C son complémentaire. Soit $C_a = \{x : \omega(f,x) < a\}$. Montrer que C_a est un ouvert et que $C = \bigcap_{n>0} C_{\frac{1}{n}}$
4. Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ne peut pas être écris comme intersection denombrable d'ouverts denses.
5. En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que ses points de continuité soient les nombres rationnels.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$. Soit F un sous espace fermé de E contenant uniquement des fonctions $\mathcal{C}^1$. Sur F, on a une norme $||f||_1 = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.

1. Montrer que l'application de $(F, ||.||_\infty) \longrightarrow (E, ||.||_\infty); f \mapsto f'$ est continue.
2. En déduire que les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes sur F.
3. Montrer que la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $||.||_1$ est relativement compacte dans $(F, ||.||_\infty)$
4. En déduire que F est de dimension finie.

Exercice 4. Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach. Soient F_1 et F_2 deux sous espaces fermés de E. On suppose que la somme $F_1 + F_2 = \{x + y; (x,y) \in F_1 \times F_2\}$ est fermée. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $z \in F_1 + F_2$, il existe $(x,y) \in F_1 \times F_2$ tel que $z = x + y$ et $||x|| \leq C||z||, ||y|| \leq C||z||$.

Exercice 5 (Théorème de Sunyer y Balager). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On suppose : $\forall x \in I, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. On se propose de montrer que : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) = 0$ (autrement dit, f est une fonction polynomiale).

On dit que $x \in I$ est polynomial s'il existe un voisinage de x dans I sur lequel f coincide avec un polynôme.

1. Soit $J \subset I$ un intervalle tel que tout $x \in J$ est polynomial. Montrer que f coincide avec un polynôme sur J.
2. Soit F_n l'ensemble des points de I tels que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que F_n est un fermé de I
3. Soit Z l'ensemble des points de I qui ne sont pas polynomiaux. Montrer que Z est un fermé de I sans point isolé.
4. Soit $Z_n = Z \cap F_n$. On suppose que Z est non vide. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert U de I et un entier n_0 tels que $Z \cap U \neq \emptyset$ et $Z \cap U \subset Z_{n_0}$.
5. Montrer que pour tout $x \in Z \cap U$, pour tout $n \geq n_0$, on a $f^{(n)}(x) = 0$.
6. Soit $x \in (I - Z) \cap U$. Montrer qu'il existe a et b tels que $]a, b[$ est un voisinage de x contenu dans $(I - Z) \cap U$ et que a ou b est dans $Z \cap U$. En déduire que f coincide sur $]a, b[$ avec un polynôme de degré inférieur ou égale à n_0.
7. En déduire que f coincide avec un polynôme de degré au plus n_0 sur U, puis que Z est vide. Conclure.

Exercice 6.

1. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que $(T_i)_{i\in I}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. Montrer qu'il existe un G_δ-dense $G \subset E$ tel que :

$$\forall x \in G, \sup_{i\in I} ||T_i(x)|| = +\infty$$

(G_δ-dense := intersection dénombrable d'ouverts denses.)

2. Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\begin{aligned} S_n : &\mathcal{C}_{2\pi} \longrightarrow \mathcal{C}_{2\pi} \\ &f \mapsto (t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}) \end{aligned}$$

(oú $c_k(f)$ désigne le k-ième coefficient de Fourier de f : $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt)$ Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup_{f\in\mathcal{C}_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{||f||_\infty} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt$$

Où pour tout $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$

3. En utilisant la question 1, montrer qu'il existe un sous ensemble dense de D de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que, pour tout $f \in D$, la série de Fourier de f ne converge pas vers $f(t_0)$ en t_0.