École Normale Supérieure de Lyon **Année 2017–2018**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

Corrigé partiel TD 8. Différentielles, difféomorphismes, accroissements finis

Exercice 7. *Corrigé*

1. Le théorème de représentation de Riesz nous dit que l'application linéaire $\Phi : H \to \mathcal{L}_C(H,\mathbb{R}), x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ est une bijection. Mais en fait c'est une isométrie (en particulier continue). Donc $\nabla f = \Phi^{-1}(Df)$ est continue si et seulement si Df l'est.

2. (a) Si $H \xrightarrow{\phi} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, alors $\langle \nabla(f \circ \phi)(x).h, \cdot \rangle = D(f \circ \phi)(x).h = Df(\phi(x))D\phi(x).h = f'(\phi(x))\langle \nabla\phi(x), h\rangle = \langle f'(\phi(x))\nabla\phi(x), h\rangle$ (pour la troisième égalité on a utilisé le fait que Df agit par multiplication par la dérivée, et $D\phi$ agit par produit scalaire avec le gradient. On en tire $\nabla(f \circ \phi(x)) = f'(\phi(x))\nabla\phi(x)$.

   (b) Si $\mathbb{R} \xrightarrow{F} H \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$, alors $D(\phi \circ F)(x).h = D\phi(F(x))DF(x).h$ Si on applique à l'accroissement $h = 1$, on obtient $(\phi \circ F)'(x) = D\phi(F(x)).F'(x) = \langle \nabla\phi(F(x)), F'(x)\rangle$.

   (c) Si $H \xrightarrow{\theta} H \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$, alors $\langle \nabla(\phi \circ \theta)(x), h\rangle = D(\phi \circ \theta)(x).h = D\phi(\theta(x))D\theta(x)/h = \langle \nabla\phi(\theta(x)), D\theta(x).h\rangle = \langle (D\theta(x))^*\nabla\phi(\theta(x)), h\rangle$, où A^* désigne l'adjoint de A. On obtient $\nabla(\phi \circ \theta)(x) = (D\theta(x))^*\nabla\phi(\theta(x))$.

3. (a) $\nabla f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Point critique en 0. Dessin : $\begin{array}{ccc} \searrow & \rightarrow & \nearrow \\ \downarrow & \bullet & \uparrow \\ \swarrow & \leftarrow & \nwarrow \end{array}$

   (b) $\nabla g(x_1, x_2) = (2x_1(2x_1^2-1), 2x_2(2x_2^2-1))$. Point critique dès que $x_1, x_2 \in \{0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\}$. Dessin :

$$\begin{array}{ccccccc}
\nwarrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow \\
\leftarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \rightarrow \\
\swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow \\
\leftarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \rightarrow \\
\nwarrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow \\
\leftarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \rightarrow \\
\swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow
\end{array}$$

   (c) $\nabla h(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2e^{-x_2^2})$. Point critique en 0. Dessin : $\begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \leftarrow & \bullet & \rightarrow \\ \nwarrow & \uparrow & \nearrow \end{array}$

4. Par composition, bilinéarité du produit scalaire, et linéarité du produit vectoriel avec une constante, on obtient que la différentielle par rapport à x de $\log(\|a \wedge x\|^2)$ est $\frac{1}{\|a\wedge x\|^2}2\langle a \wedge x, a \wedge h\rangle$. Par ailleurs, la différentielle de $e^{-\langle b,x\rangle}$ est $-e^{-\langle b,h\rangle}\langle b, x\rangle$, encore par composition. Donc

$$Df(x).h = \frac{1}{\|a \wedge x\|^2}2\langle a \wedge x, a \wedge h\rangle e^{-\langle b,x\rangle} - \log(\|a \wedge x\|^2)e^{-\langle b,x\rangle}\langle b, h\rangle \quad (1)$$

$$= e^{-\langle b,x\rangle}\left(\frac{2\langle a \wedge x, a \wedge h\rangle}{\|a \wedge x\|^2} - \log(\|a \wedge x\|^2)\langle b, h\rangle\right) \quad (2)$$

Pour le gradient, on veut tout réécrire comme un produit scalaire avec h. Le terme qui nous embête est $\langle a \wedge x, a \wedge h\rangle = \langle a \wedge h, a \wedge x\rangle = \det(a, h, a \wedge x) = \det(a \wedge x, a, h) = \langle (a \wedge x) \wedge a, h\rangle$ (on a utilisé la propriété "produit mixte" du produit vectoriel). On en déduit

$$\nabla f(x) = e^{-\langle b,x\rangle} \left(\frac{2(a \wedge x) \wedge a}{\|a \wedge x\|^2} - \log(\|a \wedge x\|^2) b \right).$$

On peut aller plus loin en montrant que $(a \wedge x) \wedge a = \|a\|^2 x - \langle x, a\rangle a$ (formule du triple produit vectoriel).

Exercice 8. *Corrigé*

1. Pour l'injectivité, si $x, y \in E$ et $f(x) = f(y)$, alors $g(x) - g(y) = y - x$ et donc $\|y - x\| = \|g(x) - g(y)\|$. Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à g différentiable dans E convexe, cette dernière quantité est majorée par $k\|x - y\|$, d'où $(1 - k)\|x - y\| \leq 0$ et donc $x = y$.
2. Pour la bornitude on a

$$\begin{aligned} \|f(x)\| + \|f(0)\| &\geq \|f(x) - f(0)\| && \text{inégalité } \triangle \\ &= \|x - (g(0) - g(x))\| \\ &\geq \|x\| - \|g(0) - g(x)\| && \text{inégalité } \triangle \text{ renversée} \\ &\geq (1 - k)\|x\| && \text{accroissements finis pour } g. \end{aligned}$$

Exercice 9. *Corrigé*

Soit $\Phi : \mathcal{C}^1(K) \times U \to \mathbb{R}, (f, x) \mapsto f(x)$. On met bien entendu la distance produit sur $C^1(K) \times U \to \mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned} \Phi(f + g, x + h) = f(x + h) + g(x + h) &= f(x) + Df(x).h + o(h) + g(x) + g(x + h) - g(x) \\ &= \Big(f(x)\Big) + \Big(Df(x).h + g(x)\Big) + \Big(o(h) + g(x + h) - g(x)\Big) \end{aligned}$$

Les trois parenthèses correspondent au terme constant puis au terme linéaire en (g, h), puis aux autres termes, dont on voudrait qu'ils soient d'ordre inférieur. Il reste à montrer deux choses :

1. que $(g, h) \mapsto Df(x).h + g(x)$ est bien linéaire continue : c'est immédiat.
2. que $g(x + h) - g(x)$ est bien un $o(\|g, h\|)$.
   — Mauvaise piste : différencier g. On obtient $g(x + h) - g(x) = Dg(x).h + o(h)$, le premier terme étant quadratique en (g, h), et le deuxième sous-linéaire en h, la somme des deux est bien un $o(\|g, h\|)$. Problème : le $o(h)$ dépend de g. On pourrait imaginer que quand g devient petit, il soit de moins en moins un petit o, ce qui pose problème quand on veut faire tendre simultanément (g, h) vers $(0, 0)$.
   — Bonne manière : IAF ! $\|g(x + h) - g(x)\| \leq \sup_K \|Dg\|\|h\| = O(\|g\|_{C^1(K)}\|h\|) = O(\|g, h\|^2) = o(\|g, h\|)$.

Ceci termine la preuve de la différentiabilité de Φ, avec $D\Phi(f, x).(g, h) = Df(x).h + g(x)$.

Exercice 10. *Corrigé*

1. On utilise l'inégalité des accroissements finis version ouvert non convexe, qui donne ici $|f(x)-f(y)| \leq kd_U(x,y)$, où d_U est la distance par lignes polygonales. Il n'est pas dur de voir ici par le fait que la dimension est ≥ 2, qu'il est toujours possible de construire des lignes polygonales $x \to y$ de distance arbitrairement proche de $\|x-y\|$. Et donc $d_U(x,y) = \|x-y\|$ d'où le résultat.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tq pour $x \in B(0,\eta) \cap K$, $\|Df(x) - L\| \leq \varepsilon$. Sur $B(0,\eta) \cap K$, $\|Df\|$ est alors bornée par $L + \varepsilon$. D'où f Lipschitzienne donc uniformément continue dans l'ouvert $B(0,\eta) \cap K$ dense dans $B(0,\eta)$. Donc f se prolonge en une uniformément continue en 0, toujours notée f
   Maintenant si $\|x\| \leq \eta$, on applique l'IAF à $g(t) = f(tx) - tL.x$, continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$, et la dérivée vaut $Df(tx).x - L.x$. Donc $|f(x) - f(0) - L.x| = |g(1) - g(0)| \leq \sup_{0<t<1} |g'(t)| \leq \sup_{0<t<1} \|Df(tx) - L\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$.
   On a montré $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in B(0,\eta), |f(x) - f(0) - L.x| \leq \varepsilon \|x\|$, i.e. la différentiabilité en 0 de différentielle L. On a immédiatement le caractère $\mathcal{C}^1$.

Exercice 11. *Corrigé*

1. L'IAF nous donne un sens : $||f(y) - f(x)|| \leq g(y) - g(x)$.
   Pour l'autre, on suppose sans perte de généralité que $a < x < y < b$ et on découpe en $[a,x]$, $[x,y]$, $[y,b]$. On a
   $$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &\leq \|f(b) - f(y)\| + \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(a)\| \\ &\leq g(b) - g(y) + \|f(y) - f(x)\| + g(x) - g(a) \end{aligned}$$
   Si on simplifie les termes des deux côtés par l'égalite $||f(b) - f(a)|| = g(b) - g(a)$, on obtient $0 \leq \|f(y) - f(x)\| - g(y) - g(x))$ i.e. ce qu'on voulait.
2. On déduit par exemple que $\|f(b) - f(a)\| = \|f(b) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$ pour $c \in]a,b[$. En mettant au carré des deux côtés et en calculant on se ramène au cas d'égalité dans Cauchy-Schwartz.
3. Pour la norme 1 dans $\mathbb{R}^2$, les chemins géodésiques (γ tq $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$ pour tous t,s) ne sont pas uniques et pas forcément contenus dans des droites affines. (Penser à des marches d'escalier). Pourtant ils vérifient toutes les hypothèses mentionnées ici avec $g(t) = t$.