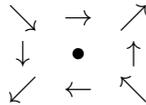
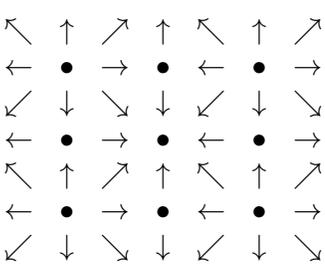
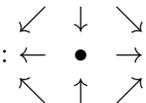


CORRIGÉ PARTIEL TD 8. DIFFÉRENTIELLES, DIFFÉOMORPHISMES, ACCROISSEMENTS FINIS

EXERCICE 7. *Corrigé*

1. Le théorème de représentation de Riesz nous dit que l'application linéaire $\Phi : H \rightarrow \mathcal{L}_C(H, \mathbb{R}), x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ est une bijection. Mais en fait c'est une isométrie (en particulier continue). Donc $\nabla f = \Phi^{-1}(Df)$ est continue si et seulement si Df l'est.
2. (a) Si $H \xrightarrow{\phi} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, alors $\langle \nabla(f \circ \phi)(x), h, \cdot \rangle = D(f \circ \phi)(x).h = Df(\phi(x))D\phi(x).h = f'(\phi(x))\langle \nabla\phi(x), h \rangle = \langle f'(\phi(x))\nabla\phi(x), h \rangle$ (pour la troisième égalité on a utilisé le fait que Df agit par multiplication par la dérivée, et $D\phi$ agit par produit scalaire avec le gradient. On en tire $\nabla(f \circ \phi)(x) = f'(\phi(x))\nabla\phi(x)$.
- (b) Si $\mathbb{R} \xrightarrow{F} H \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$, alors $D(\phi \circ F)(x).h = D\phi(F(x))DF(x).h$ Si on applique à l'accroissement $h = 1$, on obtient $(\phi \circ F)'(x) = D\phi(F(x)).F'(x) = \langle \nabla\phi(F(x)), F'(x) \rangle$.
- (c) Si $H \xrightarrow{\theta} H \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$, alors $\langle \nabla(\phi \circ \theta)(x), h \rangle = D(\phi \circ \theta)(x).h = D\phi(\theta(x))D\theta(x).h = \langle \nabla\phi(\theta(x)), D\theta(x).h \rangle = \langle (D\theta(x))^*\nabla\phi(\theta(x)), h \rangle$, où A^* désigne l'adjoint de A . On obtient $\nabla(\phi \circ \theta)(x) = (D\theta(x))^*\nabla\phi(\theta(x))$.

3. (a) $\nabla f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Point critique en 0. Dessin : 
- (b) $\nabla g(x_1, x_2) = (2x_1(2x_1^2-1), 2x_2(2x_2^2-1))$. Point critique dès que $x_1, x_2 \in \{0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\}$. Dessin : 

- (c) $\nabla h(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2e^{-x_2^2})$. Point critique en 0. Dessin : 

4. Par composition, bilinéarité du produit scalaire, et linéarité du produit vectoriel avec une constante, on obtient que la différentielle par rapport à x de $\log(\|a \wedge x\|^2)$ est $\frac{1}{\|a \wedge x\|^2} 2\langle a \wedge x, a \wedge h \rangle$. Par ailleurs, la différentielle de $e^{-\langle b, x \rangle}$ est $-e^{-\langle b, x \rangle} \langle b, x \rangle$, encore par composition. Donc

$$Df(x).h = \frac{1}{\|a \wedge x\|^2} 2\langle a \wedge x, a \wedge h \rangle e^{-\langle b, x \rangle} - \log(\|a \wedge x\|^2) e^{-\langle b, x \rangle} \langle b, h \rangle \tag{1}$$

$$= e^{-\langle b, x \rangle} \left(\frac{2\langle a \wedge x, a \wedge h \rangle}{\|a \wedge x\|^2} - \log(\|a \wedge x\|^2) \langle b, h \rangle \right) \tag{2}$$

Pour le gradient, on veut tout réécrire comme un produit scalaire avec h . Le terme qui nous embête est $\langle a \wedge x, a \wedge h \rangle = \langle a \wedge h, a \wedge x \rangle = \det(a, h, a \wedge x) = \det(a \wedge x, a, h) = \langle (a \wedge x) \wedge a, h \rangle$ (on a utilisé la propriété "produit mixte" du produit vectoriel). On en déduit

$$\nabla f(x) = e^{-\langle b, x \rangle} \left(\frac{2(a \wedge x) \wedge a}{\|a \wedge x\|^2} - \log(\|a \wedge x\|^2) b \right).$$

On peut aller plus loin en montrant que $(a \wedge x) \wedge a = \|a\|^2 x - \langle x, a \rangle a$ (formule du triple produit vectoriel).

EXERCICE 8. Corrigé

1. Pour l'injectivité, si $x, y \in E$ et $f(x) = f(y)$, alors $g(x) - g(y) = y - x$ et donc $\|y - x\| = \|g(x) - g(y)\|$. Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à g différentiable dans E convexe, cette dernière quantité est majorée par $k\|x - y\|$, d'où $(1 - k)\|x - y\| \leq 0$ et donc $x = y$.
2. Pour la bornitude on a

$$\begin{aligned} \|f(x)\| + \|f(0)\| &\geq \|f(x) - f(0)\| && \text{inégalité } \Delta \\ &= \|x - (g(0) - g(x))\| \\ &\geq \|x\| - \|g(0) - g(x)\| && \text{inégalité } \Delta \text{ renversée} \\ &\geq (1 - k)\|x\| && \text{accroissements finis pour } g. \end{aligned}$$

EXERCICE 9. Corrigé

Soit $\Phi : C^1(K) \times U \rightarrow \mathbb{R}, (f, x) \mapsto f(x)$. On met bien entendu la distance produit sur $C^1(K) \times U \rightarrow \mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned} \Phi(f + g, x + h) &= f(x + h) + g(x + h) = f(x) + Df(x).h + o(h) + g(x) + g(x + h) - g(x) \\ &= \left(f(x) \right) + \left(Df(x).h + g(x) \right) + \left(o(h) + g(x + h) - g(x) \right) \end{aligned}$$

Les trois parenthèses correspondent au terme constant puis au terme linéaire en (g, h) , puis aux autres termes, dont on voudrait qu'ils soient d'ordre inférieur. Il reste à montrer deux choses :

1. que $(g, h) \mapsto Df(x).h + g(x)$ est bien linéaire continue : c'est immédiat.
2. que $g(x + h) - g(x)$ est bien un $o(\|g, h\|)$.
 - Mauvaise piste : différencier g . On obtient $g(x + h) - g(x) = Dg(x).h + o(h)$, le premier terme étant quadratique en (g, h) , et le deuxième sous-linéaire en h , la somme des deux est bien un $o(\|g, h\|)$. Problème : le $o(h)$ dépend de g . On pourrait imaginer que quand g devient petit, il soit de moins en moins un petit o , ce qui pose problème quand on veut faire tendre simultanément (g, h) vers $(0, 0)$.
 - Bonne manière : IAF! $\|g(x + h) - g(x)\| \leq \sup_K \|Dg\| \|h\| = O(\|g\|_{C^1(K)} \|h\|) = O(\|g, h\|^2) = o(\|g, h\|)$.

Ceci termine la preuve de la différentiabilité de Φ , avec $D\Phi(f, x).(g, h) = Df(x).h + g(x)$.

EXERCICE 10. Corrigé

1. On utilise l'inégalité des accroissements finis version ouvert non convexe, qui donne ici $|f(x) - f(y)| \leq kd_U(x, y)$, où d_U est la distance par lignes polygonales. Il n'est pas dur de voir ici par le fait que la dimension est ≥ 2 , qu'il est toujours possible de construire des lignes polygonales $x \rightarrow y$ de distance arbitrairement proche de $\|x - y\|$. Et donc $d_U(x, y) = \|x - y\|$ d'où le résultat.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tq pour $x \in B(0, \eta) \cap K$, $\|Df(x) - L\| \leq \varepsilon$. Sur $B(0, \eta) \cap K$, $\|Df\|$ est alors bornée par $L + \varepsilon$. D'où f Lipschitzienne donc uniformément continue dans l'ouvert $B(0, \eta) \cap K$ dense dans $B(0, \eta)$. Donc f se prolonge en une uniformément continue en 0, toujours notée f

Maintenant si $\|x\| \leq \eta$, on applique l'IAF à $g(t) = f(tx) - tLx$, continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, et la dérivée vaut $Df(tx).x - Lx$. Donc $|f(x) - f(0) - Lx| = |g(1) - g(0)| \leq \sup_{0 < t < 1} |g'(t)| \leq \sup_{0 < t < 1} \|Df(tx) - L\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$.

On a montré $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in B(0, \eta), |f(x) - f(0) - Lx| \leq \varepsilon \|x\|$, i.e. la différentiabilité en 0 de différentielle L . On a immédiatement le caractère \mathcal{C}^1 .

EXERCICE 11. Corrigé

1. L'IAF nous donne un sens : $\|f(y) - f(x)\| \leq g(y) - g(x)$.
Pour l'autre, on suppose sans perte de généralité que $a < x < y < b$ et on découpe en $[a, x]$, $[x, y]$, $[y, b]$. On a

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &\leq \|f(b) - f(y)\| + \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(a)\| \\ &\leq g(b) - g(y) + \|f(y) - f(x)\| + g(x) - g(a) \end{aligned}$$

Si on simplifie les termes des deux côtés par l'égalité $\|f(b) - f(a)\| = g(b) - g(a)$, on obtient $0 \leq \|f(y) - f(x)\| - g(y) + g(x)$ i.e. ce qu'on voulait.

2. On déduit par exemple que $\|f(b) - f(a)\| = \|f(b) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$ pour $c \in]a, b[$. En mettant au carré des deux côtés et en calculant on se ramène au cas d'égalité dans Cauchy-Schwartz.
3. Pour la norme 1 dans \mathbb{R}^2 , les chemins géodésiques (γ tq $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ pour tous t, s) ne sont pas uniques et pas forcément contenus dans des droites affines. (Penser à des marches d'escalier). Pourtant ils vérifient toutes les hypothèses mentionnées ici avec $g(t) = t$.