
TD 9. Différentiabilité, accroissements finis, ordre supérieur.

Exercice 1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Etudier le caractère $\mathcal{C}^2$ de f.

Exercice 2. Au cours des TD précédents, nous avons prouvé que les applications suivantes étaient différentiables. Sont-elles $\mathcal{C}^\infty$?

1. $\phi_L : x \mapsto \langle x, L(x) \rangle$, où $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. $\theta : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto tr(MA^{-1}) \quad \text{pour } M \text{ fixée.} \end{cases}$
3. $\xi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto tr(A^p). \end{cases}$
4. $\psi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A). \end{cases}$

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\phi : E \longrightarrow E$ deux applications $\mathcal{C}^2$. Exprimer $d^2(f \circ \phi)$ à l'aide de df et $d\phi$, puis de ∇f et $d\phi$.

Exercice 4. Continuité, existence de dérivées partielles et caractère $\mathcal{C}^1$ de $f(x,y) = \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}$, prolongée par 0 en $(0,0)$.

Exercice 5. On pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y - \frac{4x^6 y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

avec $f(0,0) = 0$.

1. Continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. On fixe θ et on pose $g_\theta(r) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.
3. Le point $(0,0)$ est il un minimum local ?

Exercice 6. Déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a,$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On utilisera le changement de variable : $u = x + y$, $v = x - y$.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup.

1. Montrer que $\Omega = \{f \in E | \forall p \in \mathbb{N} f(0) + p^2 \neq 0\}$ est un ouvert de E.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considere :

$$\begin{aligned} \varphi_n : \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \frac{1}{f(0) + n^2}. \end{aligned}$$

   Montrer que φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout $f \in \Omega$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(f)$ converge vers un réel noté $\varphi(f)$.
4. Montrer (correctement !) que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable et exprimer sa différentielle, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer ses différentielles d'ordre k.

Exercice 8. *

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], E)$ où E est un espace de Banach, dont la dérivée à droite f'_d existe sur $x \in]a, b[$ et est continue. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1$.

Exercice 9. **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant que f est deux fois dérivable en a. On pose :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que g est différentiable en (a, a) et calculer sa différentielle.