Corrigé TD 9. Différentiabilité, accroissements finis, ordre supérieur.

Convention de notation : Par l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$ et $\mathcal{L}_c(E, E; F)$, on peut voir la différentielle seconde alternativement comme une application bilinéaire, ou comme une application linéaire à image dans les applications linéaires. On notera systématiquement D^2F la première et $D(DF)$ la seconde, reliées par l'égalité d'applications linéaires

$$\forall h \in E,\ D(DF)(x).h = D^2F(x).(h, \cdot).$$

où l'on utilise la notation "$\cdot$" pour noter une application bilinéaire partiellement appliquée. Ceci se traduit en l'égalité suivante d'éléments de F :

$$\forall h \in E, k \in E,\ (D(DF)(x).h).k = D^2F(x).(h, k).$$

Remarquons que si on différentie la différentielle appliquée en un vecteur fixé $k \in E$, on obtient

$$D(DF.k)(x) = D^2F(x).(\cdot, k).$$

c'est-à-dire :

$$\forall h \in E,\ D(DF.k)(x).h = D^2F(x).(h, k).$$

(Il faut savoir prouver ceci, en écrivant que $DF.k = G_k \circ DF$, où $G_k : \mathcal{L}_c(E, F) \to F, A \mapsto A.k$.)
Remarque : ces notations sont indicatives, vous pouvez aussi adopter des notations plus proches du cours, l'important est de comprendre la nature des objets quand vous passez d'une ligne à l'autre.

Exercice 1. Montrons que f est $\mathcal{C}^1$. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y(x^2+y^2)-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2+y^2)-2y^2x^3}{(x^2+y^2)^2}$. Si on a $(x, y) = \rho(c, s)$ avec $\rho \neq 0$ et (c, s) unitaire, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \rho(3c^2s - 2c^4s) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \rho(c^3 - 2c^3s^2).$$

On déduit alors que $|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq 5\|(x, y)\|$ et $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq 3\|(x, y)\|$. Donc les dérivées partielles ont limite 0 quand $(x, y) \to 0$. Donc la différentielle $Df(x, y)$ a également une limite en 0, qui est la forme linéaire nulle. Par un exercice du TD précédent, f se prolonge à une fonction $\mathcal{C}^1$ en 0.
Si on avait la différentiabilité seconde en 0, on aurait

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = D(Df.(1, 0))(x, y) = D^2f(x, y).(\cdot, (1, 0)).$$

Mais si on applique des deux côtés en (c, s) unitaire et prend $(x, y) = (0, 0)$, on aurait

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0).(c, s) = D^2f(0, 0).((c, s), (1, 0)).$$

On sait calculer $D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).(c,s)$: c'est juste la dérivée directionnelle en (c,s)

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).(c,s) = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho c,\rho s) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 3c^2 s - 2c^4 s.$$

On obtient que pour (c,s) unitaire,

$$D^2 f(0,0).((c,s),(1,0)) = 3c^2 s - 2c^4 s.$$

Ce qui est absurde car à gauche on a une application linéaire en (c,s) et à droite non. Donc en fait f ne peut avoir de différentielle seconde en 0, et encore moins être $\mathcal{C}^2$.

Exercice 2. Toutes ces applications sont $\mathcal{C}^\infty$ par composition.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\phi : E \longrightarrow E$ deux applications $\mathcal{C}^2$. Exprimer $d^2(f\circ\phi)$ à l'aide de df et $d\phi$, puis de ∇f et $d\phi$. On a $D(f\circ\phi) = \kappa\circ\theta$ où $E \xrightarrow{\theta} \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})\times\mathcal{L}_c(E,E) \xrightarrow{\kappa} L_c(E,\mathbb{R})$, avec $\kappa(A,B) = A.B$ la forme bilinéaire composition, et

$$\theta(x) = \Big(Df(\phi(x))\,,\,D\phi(x)\Big).$$

Différentions θ. Pour la deuxième coordonnée, on a $D(D\phi)(x).h = D^2\phi(x).(h,\cdot)$. Pour la première coordonnée , on a la composition $Df\circ\phi$. On calcule alors $D(Df)(\phi(x)).h = D^2 f(\phi(x)).(h,\cdot)$. On obtient

$$D\theta(x).h = \Big(D^2 f(\phi(x)).(D\phi(x).h,\cdot)\,,\,D^2\phi(x).(h,\cdot)\Big).$$

Par ailleurs, par bilinéarité,

$$D\kappa(A,B).(H,K) = A.K + H.B$$

Donc en composant :

$$\begin{aligned} D(D(f\circ\phi))(x).h &= D(\kappa\circ\theta).h = D\kappa(\theta(x)).(D\theta(x).h) \\ &= \Big(Df(\phi(x))\Big).\Big(D^2\phi(x).(h,\cdot)\Big) \;+\; \Big(D^2 f(\phi(x)).(D\phi(x).h,\cdot)\Big).\Big(D\phi(x)\Big) \end{aligned}$$

On peut réappliquer cette égalité entre applications linéaires à un vecteur k pour obtenir

$$\begin{aligned} D^2(f\circ\phi)(x).(h,k) &= (D(D(f\circ\phi))(x).h).k \\ &= Df(\phi(x)).D^2\phi(x).(h,k) \;+\; D^2 f(\phi(x)).(D\phi(x).h, D\phi(x).k). \end{aligned}$$

Exercice 4. Continuité, existence de dérivées partielles et caractère $\mathcal{C}^1$ de $f(x,y) = \frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2}$, prolongée par 0 en $(0,0)$. On calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = \frac{(\sin(y)-y\cos(x))(x^2+y^2) - 2x(x\sin(y)-y\sin(x))}{(x^2+y^2)^2}.$$

On obtient par exemple : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^2\sin(y)}{y^4} \to \infty$ quand $y\to 0$. Donc on ne pourrait pas avoir de caractère $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$. On ne peut pas utiliser le théorème de prolongement. On peut en revanche faire un développement limité en 0.

$$f(x,y) = \frac{x(y-O(y^3)) - y(x-O(x^3))}{x^2+y^2} = \frac{O(xy^3)+O(yx^3)}{x^2+y^2} = \frac{O(\|x,y\|^4)}{\|x,y\|^2} = O(\|x,y\|^2).$$

On en déduit que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ par $f(0,0)=0$, et qu'alors $Df(0,0)=0$. Par contre on n'a pas le caractère $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 5. On pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

avec $f(0,0) = 0$.

1. On minore le dénominateur par une inégalité classique $(x^4+y^2)^2 \geq 4x^4y^2$. On en déduit que pour $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leq \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} \leq x^2 \leq \|(x,y)\|^2$. Les autres termes de f sont aussi bornables quadratiquement, on obtient

$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|^2$$

d'où la continuité en 0, et la différentiabilité avec $Df(0,0) = 0$.

2. On pose $c = \cos(\theta), s = \sin(\theta)$. On a alors, quand $s \neq 0$,

$$g_\theta(r) = r^2 - 2r^3c^2s - \frac{4c^6s^2}{(c^4 + s^2/r^2)^2} \geq r^2 - 2r^3c^2s - 4r^4c^6/s^2.$$

On a obtenu la majoration en minorant le dénominateur de la fraction par s^4/r^4. Donc, vu que $g_\theta(0) = 0$ et que $g_\theta(r) = r^2(1 - o_\theta(1))$, on a bien un minimum local en 0. Remarquer que le petit o dépend de θ, c'est bien le problème mis en valeur dans la prochaine question.

3. On trouve un probleme en testant avec $y = x^2$. On obtient

$$f(x,x^2) = x^2 + x^4 - 2x^2x^2 - \frac{4x^6x^4}{(x^4+x^4)^2} = x^2 - 2x^4 - \frac{4x^{10}}{4x^8} = -2x^4.$$

Donc f prend des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de 0 et 0 n'est pas un minimum local.

Exercice 6. Déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a,$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On utilisera le changement de variable : $u = x+y$, $v = x-y$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$. C'est un $\mathcal{C}^1$-différomorphisme. On pose $g(u,v) = f \circ L^{-1}(u,v)$. Alors $Dg(L(x,y)) \circ L = Df(x,y)$. La fonction f vérifie l'EDP si et seulement si $Df.(1,-1) \equiv a$, si et seulement si $Dg.(L.(1,-1)) \equiv a$ si et seulement si $Dg.(0,2) \equiv a$ si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial v} = a/2$. Donc $g(u,v) = g(u,0) + av/2$ pour tous u, v, et $u \mapsto g(u,0)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$. Réciproquement pour toute fonction h $\mathcal{C}^1$, on a bien $g(u,v) = h(u) + av/2$ solution de l'EDP pour g. Donc les solutions de l'EDP originale sont $f(x,y) = h(x+y) + a(x-y)/2$.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup.

1. Si on définit $\phi : E \to \mathbb{R}, \phi(f) = f(0)$, alors ϕ est une application linéaire continue de norme 1. Et Ω est $\phi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{p^2, p \in \mathbb{N}\})$ donc l'image réciproque d'un ouvert par ϕ donc ouvert.
2. $\varphi_n = \frac{1}{n^2+\phi}$ est différentiable par composition, et $D\varphi_n(f).g = \frac{-1}{(n^2+\phi(f))^2}\phi(g) = \frac{-1}{(n^2+f(0))^2}g(0)$.
3. Oui la série est absolument convergente par comparaison avec la somme des inverses carrés.

4. On a alors $\varphi = F \circ \phi$ où $F : \mathbb{R} \setminus \{p^2, p \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x+n^2)^{-1}$ Alors F est bien $\mathcal{C}^\infty$ par dérivation sous le signe intégrale. Et $D\varphi(f).g = F'(f(0))g(0)$, et en itérant : $D^k\varphi(f).(g_1, \ldots, g_k) = F^{(n)}(f(0))g_k(0) \cdots g_1(0)$.

Exercice 8. * Soit $x \in]a,b[$.On cherche à montrer que f est dérivable à gauche en x de dérivée $f'_d(x)$. C'est-à-dire qu'on veut montrer que pour $h \to 0, h > 0$ on a $|f(x-h) - f(x) + f'_d(x)h| \leq ho(1)$.

Pour $h > 0$ on va alors utiliser la dérivabilité à droite en les points à gauche de x. Plus précisément on considère $g : [0,h] \mapsto \mathbb{R}$, définie par $g(k) = f(x-h+k) - f'_d(x)k$. La fonction g est bien dérivable à droite avec $|g'_d(k)| = |f'_d(x-h+k) - f'_d(x)| \leq \sup_{u \in [x-h,x]} |f'_d(u) - f'_d(x)|$. L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$|f(x-h) - f(x) + f'_d(x)h| = |g(h) - g(0)| \leq h \sup_{u \in [x-h,x]} |f'_d(u) - f'_d(x).|$$

Et cette dernière expression est bien h fois un $o(1)$ par définition de la continuité de f'_d en x. Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.