Partiel - Mardi 31 avril 2009

Dans tout le partiel, une fonction sera dite *récursive* lorsqu'elle est calculable par machine de Turing (qu'elle soit totale ou non). On parlera explicitement de fonction *récursive totale* le cas échéant.
On convient comme tout au long des tds que l'on dispose d'une fonction de codage $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ récursive primitive dont les projections réciproques Π_1 et Π_2 sont récursives primitives.
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1. *C'est un peu cours jeune hommme*

1. Soit F la suite de Fibonacci :
- $F(0) = F(1) = 1$
- $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$

Montrer que F est récursive primitive et donner en donner une écriture récursive primitive (on pourra utiliser sans justification les fonctions récursives primitives vues en TD).

2. Les ensembles suivants sont-ils récursifs ? récursivement énumérables ? co-récursivement énumérables (c'est-à-dire de complémentaire récursivement énumérable) ?

1. $\{i \in \mathbb{N}, \varphi_i(1664)$ n'est pas défini $\}$
2. $\{x \in \mathbb{N}, \varphi_{1664}(x) = 51\}$
3. $\{\langle i, j\rangle, \varphi_i = \varphi_j\}$
4. $\{i \in \mathbb{N}, \varphi_i(x) = 1664$ si $\varphi_x(x)$ s'arrête et 51 sinon$\}$

3. Montrer que si on se donne une machine résolvant le problème de l'arrêt, on peut l'utiliser pour construire une machine résolvant la conjecture de Goldbach. La conjecture de Goldbach affirme que tout entier pair est la somme de deux nombres premiers.

4. Montrer que si on se donne une machine résolvant le problème de l'arrêt, on peut l'utiliser pour construire une machine résolvant la conjecture de Syracuse. La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier a la suite définie par $u_0 = a$ et

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

atteint 1 pour un certain n.

5.Existe-t-il $m \in \mathbb{N}$ tel que φ_m ait comme domaine $\mathbb{N}\backslash\{m\}$?

Exercice 2. *Numérologie*

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions partielles récursives à une variable. On dira que $\mathcal{F}$ est *récursivement énuméré* s'il existe une fonction F partielle récursive à deux variables telle que, si l'on pose $\mathrm{F}_x : y \to \mathrm{F}(x, y)$, l'on a

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{F}_x ; x \in \mathbb{N}\}$$

1. L'ensemble des fonctions récursives est-il récursivement énuméré ?

2.L'ensemble des fonctions récursives totales est-il récursivement énuméré ?

3. On admet que l'ensemble des fonctions récursives primitives est récursivement énuméré. Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives strictement croissantes est récursivement énuméré.

4. Nous allons montrer que l'ensemble des fonctions récursives strictement croissantes n'est pas récursivement énuméré. Pour cela, supposons que cet ensemble est récursivement énuméré ; soit F la fonction qui énumère ces fonctions. Construire une fonction récursive totale strictement croissante qui n'est égale à aucun F_x. Conclure.

Exercice 3. *Arrêt de production*

On note, pour n entier, W_n le domaine de définition de φ_n. Un ensemble A est dit *productif* s'il existe une fonction récursive totale unaire g telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ (W_n \subseteq A \Rightarrow g(n) \in A \setminus W_n)$$

1. Un ensemble productif peut-il être récursivement énumérable ?

2. Soit A et B deux ensembles de naturels. Montrer que si A se réduit[1] à B et si A est productif, alors B est productif.

3. Montrer que $\{n \in \mathbb{N}/n \notin W_n\}$ est productif. En déduire là comme ça, paf, que le problème de l'arrêt est indécidable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme décidant si la machine de Turing numéro n s'arrête sur l'entrée x.

4. Pour la route, montrer que $\{n \in \mathbb{N}/W_n \text{ est fini}\}$ et $\{n \in \mathbb{N}/\varphi_n \text{ est injective}\}$ sont productifs.

5. Montrer que pour toute fonction récursive totale unaire g, il existe une fonction récursive totale k telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ W_{k(n)} = W_n \cup \{g(n)\}$. En déduire que tout ensemble productif contient un ensemble récursivement énumérable infini.

Exercice 4. *Coloriage*

Un graphe est dit k-coloriable si il existe une injection de l'ensemble des sommets dans $\{1, \ldots, k\}$ telle que deux sommets adjacents n'ont pas la même image par cette bijection.

✎ Montrer qu'un graphe infini est k-coloriable si et seulement si tout sous-graphe fini est k-coloriable.

Exercice 5. *Bonus*

Ces questions sont plutôt difficiles. Nous vous conseillons de ne pas vous y attaquer tant que vous n'avez pas fini le reste du partiel.

1. Montrer qu'il existe une fonction f telle que pour tout n, il existe N tel que

$$\forall x \geq N,\ \varphi_n(x) \neq \perp \to f(x) > \varphi_n(x).$$

2. Montrer que tout ensemble infini d'entiers contient une partie infinie non récursivement énumérable (décrivez-en une).

3.Montrer qu'il existe des ensembles infinis d'entiers dont aucune partie infinie n'est récursivement énumérable.

1. On dit que A se réduit à B quand il existe une fonction récursive totale f telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B)$.