TD 10 - Merci Cori

On rappelle l'axiomatique $\mathcal{P}$ de Péano :

– $(\mathbf{A}_1)$: $\forall v_0, \neg(Sv_0 = 0)$
– $(\mathbf{A}_2)$: $\forall v_0, \exists v_1, (\neg v_0 = 0 \Rightarrow Sv_1 = v_0)$
– $(\mathbf{A}_3)$: $\forall v_0, \forall v_1, (Sv_0 = Sv_1 \Rightarrow v_0 = v_1)$
– $(\mathbf{A}_4)$: $\forall v_0, v_0 + O = v_0$
– $(\mathbf{A}_5)$: $\forall v_0, \forall v_1, v_0 + Sv_1 = S(v_0 + v_1)$
– $(\mathbf{A}_6)$: $\forall v_0, v_0 \times 0 = 0$
– $(\mathbf{A}_7)$: $\forall v_0, \forall v_1, v_0 \times Sv_1 = (v_0 \times v_1) + v_0$
– **(SI)** : $\forall\forall v_1, \ldots, v_n, ((F[0, v_1, \ldots, v_n] \wedge \forall v_0, (F[v_0, v_1, \ldots, v_n] \Rightarrow F[Sv_0, v_1, \ldots, v_n])) \Rightarrow \forall v_0, F[v_0, v_1, \ldots, v_n])$

On dénotera $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des axiomes $(\mathbf{A}_1)$ à $(\mathbf{A}_7)$.

Exercice 1. *Preuves à la chaîne*

1. Prouver dans l'axiomatique de Péano :

1. $\forall x, 0 + x = x$
2. $\forall x, \forall y, x + y = y + x$
3. $\forall x, \forall y, \forall z, (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\forall x, x = 0 \vee \exists z, x = S(z)$

Exercice 2. *Un autre modèle est possible*

Soient X un ensemble non vide et f une fonction de $X \times X$ dans X. On considère la L_0-structure $\mathcal{M}$ dont l'ensemble de base est $M = \mathbb{N} \cup (X \times \mathbb{Z})$ et où les symboles $S, +, \times$ sont interprétés par les fonctions $S, +\times$ définies par les conditions suivantes :

– $\mathcal{M}$ est une extension de $\mathbb{N}$.
– Si $a = (x, n) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$, alors $S(a) = (x, n + 1)$
– Si $a = (x, n) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $a + m = m + a = (x, n + m)$
– Si $a = (x, n) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$ et $b = (y, m) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$, alors $(x + n) + (y + m) = (x, n + m)$
– Si $a = (x, n) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $(x, n) \times m = (x, n \times m)$ si $m \neq 0$, et $(x, n) \times 0 = 0$
– Si $a = (x, n) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $m \times (x, n) = (x, m \times n)$
– Si $a = (x, n) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$ et $b = (y, m) \in \mathcal{M} \backslash \mathbb{N}$, alors $(x + n) \times (y + m) = (f(x, y), n \times m)$

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{P}_0$.

2. Les formules suivantes sont-elles conséquences de $\mathcal{P}_0$?
– $\forall v_0, \forall v_1, v_0 + v_1 = v_1 + v_0$
– $\forall v_0, \forall v_1, \forall v_2, v_0 \times (v_1 \times v_2) = (v_0 \times v_1) \times v_2$
– $\forall v_0, \forall v_1, ((v_0 \leq v_1 \wedge v_1 \leq v_0) \Rightarrow v_0 = v_1)$
– $\forall v_0, 0 \times v_0 = 0$
(Considérer l'ordre $\leq$ défini ci-après).

3. Construire un modèle de $\mathcal{P}_0$ dans lequel l'addition n'est pas associative.

Exercice 3. *On passe à $\mathcal{P}$*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{P}$ et on suppose que $\mathbb{N}$ est une sous-structure propre de $\mathcal{M}$. On définit sur M, l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{M}$, la relation $\cong$ suivante : $x \cong y$ si et seulement si il existe deux éléments n et m de $\mathbb{N}$ tels que :

$$\mathcal{M} \vdash x + \widetilde{n} = y + \widetilde{m}$$

1. Montrer que la relation $\cong$ est une relation d'équivalence.

2. Soient a, a', b et b' des éléments de M, tels que $a \cong a'$ et $b \cong b'$. Montrer que $a + b \cong a' + b'$.

On appelle E l'ensemble des classes de M relativement à la relation $\cong$. On définit sur E la relation R par : si x et y sont dans E, alors xRy si et seulement si il existe $a \in x$ et $b \in y$ tels que $\mathcal{M} \vDash a \leq b$.

3. Montrer que la relation R est une relation d'ordre total. Montrer que E, muni de cet ordre, a un plus petit élément mais pas de plus grand élément.

4. Montrer la formule dans $\mathcal{P}$: $\forall v_1 \exists v_0 (v_0 + v_0 = v_1) \vee (v_0 + v_0 = v_1 + 1)$. En déduire habilement que R est un ordre dense sur E (un ordre dense est tel que pour toute paire d'éléments a et b tels que $a < b$, il existe un c tel que $a < c < b$).

Ce dernier point permet en fait d'établir qu'un modèle non standard dénombrable est isomorphe à $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z})$

Exercice 4. *Modèle non-standard*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{P}$.

1. Montrer que la relation définie par "$x \leq y$ si et seulement si il existe un élément z tel que $z + x = y$" est une relation d'ordre totale sur M l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{M}$.

2. Montrer l'équivalence suivante dans $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P}_I$) :
$\forall x, \forall y, (x \leq y \leftrightarrow (x = y \text{ ou } Sx \leq y))$

3. On rappelle que tout modèle de $\mathcal{P}$ a une sous-structure isomorphe à $\mathbb{N}$. Si c'est une sous-structure propre, on dit que $\mathcal{M}$ est non-standard. Montrer que $\mathcal{P}$ a un modèle non-standard.

4. Montrer qu'une formule $F[x]$ à une variable libre x satisfaite par une infinité d'entiers standards dans $\mathcal{M}$ est nécessairement satisfaite par au moins un entier non standard de $\mathcal{M}$. En déduire que $\mathbb{N}$ n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$.

Devoir maison :
Enregistrer un clip de rap français sur le désespoir d'être limité par le théorème de Gödel et l'indécidabilité du problème de l'arrêt.