TD 11 - Encore merci, Cori

On rerappelle l'axiomatique $\mathcal{P}$ de Péano :

- $(\mathbf{A}_1)$: $\forall v_0, \neg(Sv_0 = 0)$
- $(\mathbf{A}_2)$: $\forall v_0, \exists v_1, (\neg v_0 = 0 \Rightarrow Sv_1 = v_0)$
- $(\mathbf{A}_3)$: $\forall v_0, \forall v_1, (Sv_0 = Sv_1 \Rightarrow v_0 = v_1)$
- $(\mathbf{A}_4)$: $\forall v_0, v_0 + O = v_0$
- $(\mathbf{A}_5)$: $\forall v_0, \forall v_1, v_0 + Sv_1 = S(v_0 + v_1)$
- $(\mathbf{A}_6)$: $\forall v_0, v_0 \times 0 = 0$
- $(\mathbf{A}_7)$: $\forall v_0, \forall v_1, v_0 \times Sv_1 = (v_0 \times v_1) + v_0$
- **(SI)** : $\forall v_1, \ldots, v_n, ((F[0, v_1, \ldots, v_n] \wedge \forall v_0, (F[v_0, v_1, \ldots, v_n] \Rightarrow F[Sv_0, v_1, \ldots, v_n])) \Rightarrow \forall v_0, F[v_0, v_1, \ldots, v_n])$

Exercice 1. *Artithmétique*

Attention, cet exercice se place dans les définitions du cours (les axiomes sont plus nombreux que ceux de $\mathcal{P}$).

1. Montrer que les conditions suivantes sont arithmétiques (en partant de celles prouvées en cours, à savoir $Sb(x)$, $Var(x)$, $Num(x)$, $R_1(x, y, z)$, $Seqt(x)$, $tm(x)$, $f_0(x)$, $Gen(x, y)$, $R_2(x, y, z)$, $Seqf(x)$ ...)

1. $fm(x)$: E_x est une formule.
2. $A(x)$: E_x est un axiome de $\mathcal{P}$.
3. $MP(x, y, z)$: E_z est dérivable depuis E_x et E_y par la rêgle 1.
4. $Der(x, y, z)$: E_z est dérivable depuis E_x et E_y par la rêgle 1, ou dérivable depuis E_x par la rêgle 2.
5. $Pf(x)$: E_x est une preuve dans $\mathcal{P}$.
6. $P_E(x)$: E_x est prouvable dans $\mathcal{P}$.
7. $R_E(x)$: E_x est réfutable dans $\mathcal{P}$.

Exercice 2. *Théorême Chinois*

Le théorême chinois dit que : "Soient $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ une suite d'élèments de $\mathbb{N}$ premiers entre eux deux à deux et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une suite de même longueur d'éléments de $\mathbb{N}$. Alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que pour tout i, a est congru a α_i modulo b_i."

1. Montrer le théorème chinois.

2. Montrer l'existence d'une fonction β à trois variables (i, a, b), récursive primitive et représentable, telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et toute suite $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$, il existe des entiers a et b tels que, pour tout i compris entre 1 et P ; on ait $\beta(i, a, b) = n$.

3. Se convaincre que β est super utile dans la vie en FDI2, notemment pour démontrer que l'exponentielle est arithmétique.

Exercice 3. *Conjecture de Goldbach et Normalité*

Soit F l'énoncé "tout entier pair est la somme de deux nombres premiers". Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{P}$. Un élément a de M l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{M}$ est dit anormal si a est non-nul et pour tout entier standard non-nul n, il existe un élément b de M tel que $a = b \times n$. $\mathcal{M}$ est anormal s'il contient un élément anormal.

1. Montrer que la somme et le produit de deux éléments anormaux est anormale.

2. Montrer qu'il existe un modèle anormal de $\mathcal{P}$.

3. Soit $A(\mathcal{M}_1)$ l'ensemble des éléments anormaux de $\mathcal{M}_1$. Montrer qu'il existe une sous-structure $\mathcal{M}_2$ de $\mathcal{M}_1$, modèles de $\mathcal{P}_0$, et dont l'ensemble de base est :

$$\mathbb{N} \cup \{a + k, a \in A(\mathcal{M}_1), k \in Z\}$$

4. Montrer que $A(\mathcal{M}_1) = A(\mathcal{M}_2)$

5. Quels sont les nombres premiers de $\mathcal{M}_2$?

6. Montrer que $\mathcal{M}_2$ ne satisfait pas F.

Exercice 4. *Retour sur le second théorème de Gödel*

- Soit T une théorie récursive cohérente contenant $\mathcal{P}$.
- Dem = {(a, b) t.q. b est le numéro de Gödel d'une démonstration dans $\mathcal{P}$ de la formule dont a est le numéro.}

1. Considérons la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- si n est le numéro de Gödel d'une formule F[x] à une variable libre, alors $g(n)$ est le numéro de la formule $F[n]$.
- sinon $g(n) = 0$.

Montrez qu'il une existe une formule G telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P} \vdash \forall x(G[x, n] \Leftrightarrow x = g(n))$

2. Soit $\varepsilon[x] = \exists v_1 \exists v_2 (Dem(v_2, v_1) \wedge G[v_2, x])$, et a le numéro de $\neg\varepsilon[x]$. Montrez que

$$\mathcal{P} \vdash \varepsilon[a] \Leftrightarrow \exists v_1, Dem(g(a), v_1)$$

3. Montrez que T ne demontre pas $\neg\varepsilon[a]$.

4. Montrez que $\mathcal{P} \vdash \varepsilon[a]$ démontre $\exists v_1, v_2, v_3, v_4 (Dem(v_1, v3) \wedge Dem(v_2, v_4) \wedge Neg(v_1, v_2))$.

5. Qu'a-t-on démontré ? ?