TD 12 - Retour sur l'indécidabilité

Exercice 1. *Le championnat du castor affairé*

Dans tout cet exercice les entrées (éventuelles) et sorties des machines de Turing seront codées en unaire.
Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des machines de Turing d'alphabet $\{B; 1\}$ à $n+1$ états $q_0, \ldots, q_n$, où q_0 est l'état initial et q_n l'état d'acceptation, fonctionnant sur un unique ruban bi-infini avec une seule tête.
Le « championnat du castor affairé » est un jeu proposé aux machines de Turing de $\mathcal{M}_n$. Gagne celle qui réussit à écrire le plus grand nombre sur le ruban à partir de l'entrée vide avant de s'arrêter (il est donc bien entendu que la machine *doit* s'arrêter).

1. Montrer que, pour n fixé, l'ensemble des nombres que peuvent écrire les machines de $\mathcal{M}_n$ avant de s'arrêter admet un maximum $C(n)$ (la machine réalisant ce maximum est déclarée vainqueur de la compétition du castor affairé en catégorie n). Montrer que la fonction $C : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

2. Montrer que, si f est une fonction récursive, alors la fonction

$$g_f : x \mapsto \max\{f(2x+2), f(2x+3)\}$$

est calculable par une machine M_f dont on notera k_f le nombre d'états.

3. Pour $x \in \mathbb{N}$ et f récursive, construire une machine de Turing $N_{x,f}$ qui, partant de l'entrée vide, écrit $g_f(x)$ sur le ruban. Combien d'états utilise-t-elle ?

4. En déduire que pour toute fonction récursive f, il existe $x_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall x \geq x_0\ f(x) < C(x)$. En déduire que C n'est pas récursive.

Lin et Rado (1975) ont montré que $C(1) = 1$, $C(2) = 4$ et $C(3) = 6$. On sait également

$C(4) = 13$	Brady 1966–1975
$C(5) > 500$	U. Schult 1983
$C(8) > 8.10^{44}$	Green 1964
$C(12) > 6.4096^{4096^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4096^4}}}}}$ où 4096 apparaît 166 fois	U. Schult 1983

5. Faire mumuse.

6. Que fait la machine de Turing définie ci-dessous ?

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, B) = (q_1, 1, \rightarrow) & \delta(q_0, 1) = (q_2, 1, \leftarrow) \\
\delta(q_1, B) = (q_0, 1, \leftarrow) & \delta(q_1, 1) = (q_1, 1, \rightarrow) \\
\delta(q_2, B) = (q_1, 1, \leftarrow) & \delta(q_2, 1) = (q_3, 1, \leftarrow)
\end{array}$$

Exercice 2. *Ambiguité des grammaires hors contexte*

Les grammaires hors contexte est une grammaire dont les règles de production sont de la forme $A \rightarrow w$, où A est un non terminal, et w un mot composé de terminaux et de non terminaux.
Une grammaire est dite ambigue quand un mot peut être obtenu par deux arbres de dérivation distincts.

1. Montrer que décider si une grammaire hors contexte est ambigue est indécidable. On pourra réduire le problème de correspondance de post se réduit à ce problème.

Exercice 3. *C'est la tuile*

Le problème de pavage de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est défini par :

Donnée : un ensemble fini $T = t_0, \ldots, t_k$ de tuiles et deux sous-ensembles H, V de $T \times T$. (Les relations de compatibilité horizontale et verticale).

Question : existe-t-il une fonction de pavage $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto T$ telle que $f(1,1) = t_0$ et, pour tout $i, j \in \mathbb{N}, (f(i,j), f(i+1,j)) \in H, (f(i,j), f(i,j+1)) \in V$.

Nous allons considérer un problème restreint, celui des tuiles de Wang.
Un ensemble de tuiles de Wang est un ensemble de carrés dont chaque côté est coloré, ne pouvant pas tourner. Dans un pavage de Wang, les ensembles H et V contiennent donc tous les couples de tuiles tels que les côtés qui se touchent sont de même couleur.

Soit $\mathcal{M} = (\Sigma, \mathcal{Q}, \delta, q_0, q_F, \#)$ une machine de Turing à un ruban bi-infini.

1. Montrer que l'on peut réduire le problème de l'arrêt de M sur l'entrée 0 au problème de pavage par des tuiles de Wang.

2. Montrer que décider si un jeu de tuiles de Wang pave le plan (en utilisant la tuile t_0) est indécidable.

3. Montrer qu'un jeu de tuiles (pas forcément de Wang) permet de paver le plan si et seulement si il permet de paver les carrés de taille $n \times n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire une propriété de calculabilité sur l'ensemble des jeux de tuiles T pavant le plan.

Devoir maison :
Ne pas faire le devoir maison.