TD 13 - Final

Exercice 1. *Stop*

Étant donné une machine de Turing M et un entier n, dire si les problèmes suivants sont décidables ou non :

1. Étant donné un mot ω, M s'arrête-t-elle sur ω en moins de n étapes de calcul ?

2. M s'arrête-t-elle en moins de n étapes de calcul pour tout mot ω ?

3. M calcule la fonction constante n.

4. M *boucle*-t-elle sur l'entrée vide ? On dit qu'une machine de Turing *boucle* sur la donnée ω si M passe deux fois dans la même configuration.

Exercice 2. *Politique Commune de la Pêche*

1. Montrer que le problème de correspondance de Post reste indécidable lorsque tous les mots des deux séquences ont pour longueur au plus 2.

2. Qu'en est-il si tous les mots ont pour longueur 2 ?

Exercice 3. *Récursion*

Soit E une partie de $\mathcal{N}$ infinie récursivement énumérable, et f une fonction l'énumérant.

1. Montrer que E est récursivement énumérable sans répetitions.

2. Montrer que si f est croissante, alors E est récursif.

3. Montrer que E est la projection d'un ensemble récursif.

Exercice 4. *Indépendance*

On considère la théorie $\mathcal{T}$ (du premier ordre) dont le langage est forme par un symbole de prédicat p d'arité 2, et dont les axiomes sont :

(A_1) $\forall x \neg p(x,x)$

(A_2) $\forall x \forall y \forall z (p(x,y) \wedge p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

(A_3) $\forall x \forall y [p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \wedge p(z,y))]$

1. Donner un modèle de $\mathcal{T}$.

2. Montrer que les trois axiomes sont indépendants.

On considère maintenant la théorie $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{p(a,b)\}$ (A_4) où a et b sont des constantes.

3. Montrer que tout modèle de $\mathcal{T}'$ est infini.

4. Montrer que pour tout $i \in \{1;2;3;4\}$, la théorie $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}' \backslash A_i$ ($\mathcal{T}'$ privé de l'axiome Ai) admet en revanche un modèle fini. On exhibera un tel modèle pour chaque valeur de i.

Exercice 5. *Extrema*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \min\{p | \phi_p() = x\}$

1. Montrer que f est totale.

2. Montrer que f n'est pas calculable.

Soit g la fonction définie par : $g(p) = \max\{\phi_q() | q \leq p\}$

3. Montrer que g est définie à partir d'un certain rang.

4. Montrer que g n'est pas calculable.