TD 1 - Machines de Turing

Exercice 1. *Outil mathématique*

1. Donner une bijection b de $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

2. Donner un ordre de grandeur de $b(x, y)$.

3. Donner une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$, de $\mathbb{N}^4$ dans $\mathbb{N}$...

4. Donner une bijection ξ de $\mathbb{N}^\omega$ (l'ensemble des suites finies d'entiers) dans $\mathbb{N}$.

5. Donner une expression de b à l'aide de fonctions mathématiques usuelles.

On note usuellement $\langle x, y\rangle$ pour $b(b, y)$.

Exercice 2. *Echauffement*

Construisez les machines de Turing suivantes :

1. M qui écrit 0 1 0 1 0 1 0 ... sur un ruban blanc. *Pour ceux qui douteraient de l'intérêt de cette question, s'adresser à A. Turing.*

2. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 son entrée binaire.

3. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 et ajoute 1 à son entrée binaire.

4. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui ajoute 1 à son entrée binaire.

5. M à deux rubans sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui code en binaire son entrée unaire.

Exercice 3. *Reconnaissance de Langages*

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet et soit x un mot de Σ^*. Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant x la machine écrit x^{-1} (x écrit à l'envers)

2. la machine accepte x ssi x s'écrit yy^{-1} pour un certain $y \in \Sigma^*$.

3. la machine accepte x ssi x s'écrit yy pour un certain $y \in \Sigma^*$.

Exercice 4. *Calcul de fonctions*

Construire une machine de Turing qui effectue :

1. L'addition de deux entiers.

2. La multiplication de deux entiers.

3. La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.

La bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ de l'exercice 1 est donc calculable par machine de turing...

Exercice 5. *Machines avec délimiteurs*

On considère les machines de Turing à un ruban dont l'alphabet Σ ($|\Sigma| \geq 3$) possède un symbole particulier $\#$. La configuration d'entrée est de la forme $\ldots BB\#\omega\#BB\ldots$ où ω ne contient pas de $\#$. Toutes les configurations sont de ce type, à ceci près qu'on s'autorise un $\#\#$ s'il disparaît dans la configuration suivante.

Cette machine calcule f si pour tout ω elle s'arrête sur $\#f(\omega)\#$.

1. Ces machines sont-elles équivalentes aux autres machines de Turing ?

Exercice 6. *Mimes*

Définition 1 (simulation)**.** *Soit Σ un alphabet fini, $|\Sigma| \geq 2$. On dira qu'on simule une machine de Turing d'alphabet Σ calculant la fonction f par une machine de Turing d'alphabet Σ' calculant la fonction g s'il existe un entier k et une fonction injective $\phi : \Sigma \to {\Sigma'}^k$ telle que pour toute entrée x de la première, on ait $g(\phi^\star(x)) = \phi^\star(f(x))$ où $\phi^\star$ est l'extension naturelle de ϕ à $\Sigma^\star$.*

1. Simuler une machine de Turing à un ruban d'alphabet Σ par une machine de Turing d'alphabet $\{0, 1, B\}$.

2. Montrer que toute machine de Turing à k rubans peut être simulée par une machine à un ruban.

Exercice 7. *du temps et de l'espace*

✎ Supposons qu'une machine de Turing s'arrête au bout de t étapes de calcul en consommant s cases mémoires. Quelle(s) relation(s) existent entre t et s ?

Exercice 8. *Economisons l'espace et le temps*

Soit M une machine de Turing à un ruban. On supposera que pour tout mot en entrée de M ce mot est entièrement lu par M au cours du calcul.

1. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M consomme $s(|x|)$ cases mémoires sur l'entrée x alors M' consomme au plus $a + |x| + s(|x|)/c$ cases mémoires sur la même entrée.

2. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M s'arrête sur l'entrée x en $t(|x|)$ étapes alors M' s'arrête sur la même entrée en $a + |x| + t(|x|)/c$ étapes au plus.

Devoir maison :
Apprendre la biographie wikipédia de Alan Turing.