TD 4 (le vrai) -Ackermann et fonctions recursives.

Exercice 1. *Ackermann*

Histoire d'être bien d'accord, on choisit comme définition de la fonction d'Ackermann :

$$\begin{cases} A(0,x) = x+1 \\ A(p,0) = p+1 \\ A(p+1,x+1) = A(p, A(p+1,x)) \end{cases}$$

1. Donner les expressions explicites de $A(1,x)$, $A(2,x)$, $A(3,x)$.

2. Que vaut $A(4,x)$?

3. Montrer que
- $\forall (p,x) \in \mathbb{N}^2, A(p,x) > x$;
- A est strictement croissante en chacune de ses variables ;
- $A(p+1,x) > x + A(p,x)$ pour $p \geq 1$;
- $A(p,x+1) \leq A(p+1,x)$ pour $x \geq 1$.

4. On se propose de montrer que pour toute fonction récursive primitive f, il existe p tel que,

$$\forall x_1, \ldots, x_k, \qquad f(x_1, \ldots, x_k) < A(p, \sup(x_1, \ldots, x_k))$$

On procède par induction sur la structure de f.

1. Montrer le résultat pour les fonctions de base et la composition de fonctions.
2. On suppose que g et h sont des fonctions récursives primitives vérifiant la propriété. Soit $f = \mathrm{Rec}(g,h)$:
   - montrer qu'il existe une constante c_1^* telle que
   $$\sup(g(\vec{n}), n_1, \ldots, n_k) < A(c_1^*, \sup(n_1, \ldots, n_k))$$
   - montrer qu'il existe une constante c_2^* telle que
   $$\sup(h(r, n_0, \vec{n}), r, n_0, \ldots, n_k) < A(c_2^*, \sup(r, n_0, \ldots, n_k))$$
   - en déduire le résultat.

5. En déduire que la fonction A n'est pas récursive primitive.

Exercice 2. *Inversion*

1. Montrer que l'inverse d'une injection récursive est récursive partielle (lorsqu'un point n'a pas d'antécédent le comportement de l'inverse est indéfini).

2. Que dire de l'inverse d'une injection récursive primitive ?

3. Soit f une fonction récursive strictement croissante. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\#\}$ récursive totale telle que

$$\begin{cases} \forall x, & (g \circ f)(x) & = & x \\ & \forall y, \quad g(y) & = & \# \text{ si } \forall x, f(x) \neq y \end{cases}$$

Exercice 3. *C'est pas graphe... et vice-versa*

Dans cet exercice, on notera Π^2 la bijection usuelle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$, Π_1^2 et Π_2^2 ses deux projetées. On a donc

$$\begin{array}{rccl} \Pi^2 : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^2 \\ & x & \mapsto & (\Pi_1^2(x), \Pi_2^2(x)) \end{array}$$

1. Montrer que pour toute fonction φ récursive, il existe ψ de même arité et de graphe RP telle que $\varphi = \Pi_1^2 \circ \psi$.

2. Montrer que si f est RP, alors le graphe de f l'est aussi, mais que la réciproque est fausse.

Soit ψ une fonction unaire de graphe RP. On pose

$$\psi'(x,y) = \begin{cases} (x, y+1) & \text{si } y < \psi(x) \\ (x, 0) & \text{si } y = \psi(x) \\ (x, y) & \text{si } y > \psi(x) \end{cases}$$

et $\xi = \left(\Pi^2\right)^{-1} \circ \psi' \circ \Pi^2$.

3. Montrer que ξ est bijective et RP.

4. Montrer qu'il existe des fonctions unaires σ et τ RP telles que pour toute fonction unaire φ récursive il existe une fonction ξ RP et bijective telle que $\varphi = \sigma \circ \xi^{-1} \circ \tau$.

5. Montrer qu'il existe une fonction RP bijective dont l'inverse ne l'est pas.